Temario Curso Propedéutico de Matemáticas

Sesión 1, Sesión 2 y Sesión 3.- El Conjunto de Números Reales. Operaciones con números racionales. Propiedades. Operaciones algebraicas. Suma, Resta, Leyes de los Exponentes para el Producto y la División Algebraica.

Sesión 4. -Radicales y Logaritmos.

Sesión 5.- Monomios y Polinomios.

Sesión 6.- Ecuaciones Lineales e Inecuaciones lineales.

Sesión 7.- Sistemas de Ecuaciones Lineales y Sistemas de Desigualdades Lineales.

Sesión 8.- Funciones,Funciones Polinómicas, Funciones Exponenciales,Funciones Logarítmicas y Números Complejos.

Sesión 1.- El conjunto de Números Reales. Propiedades.
El sistema de los Números Reales es un conjunto R y dos operaciones adición y multiplicación y, una relación de orden denotada por < que significa es menor que, que satisface los siguientes axiomas.

Propiedades:

1.- $a + b = b + a$ (propiedad conmutativa).
2.- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (propiedad asociativa) .
3.- $a \cdot b = b \cdot a$ (propiedad conmutativa).
4.- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (propiedad asociativa).
5.- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (propiedad distributiva).
6.- Existe el único número 0 tal que $a + 0 = a$ para todo número a.
7.- Para todo número a existe tal número –a tal que $a + (-a) = 0$.
8.- Existe el único número1 tal que para todo número a tiene lugar la igualdad $a \cdot 1 = a$.
9.- Para todo número $a \neq 0$ existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

El número a^{-1} también se escribe como $\frac{1}{a}$.

9.- Si a < b y < c, entonces a < c. (propiedad transitiva).
10.- Si a < b, entonces para todo c en los reales, $a + c < b + c$.
11.- Si a < b y 0 < c, entonces ac < bc.

Operaciones con números racionales:

1.- Suma y Resta:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{7}{3}+\frac{7}{9}=$$

$$4+\frac{1}{3}+\frac{5}{9}=$$

$$\frac{6}{5}-\frac{7}{2}=$$

$$\frac{6}{9}-\frac{2}{5}-\frac{9}{4}=$$

$$-2-\frac{3}{7}-\frac{8}{3}=$$

$$-5+\frac{8}{5}-\frac{5}{3}=$$

$$9+\frac{9}{2}-\frac{7}{5}=$$

$$-\frac{5}{6}-\frac{8}{3}-7=$$

$$\frac{4}{3}-5+\frac{6}{9}=$$

2.- Multiplicación:

$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{9}\right)=$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)=$$

$$\left(-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{8}{5}\right)=$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{5}\right)=$$

$$(-3)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=$$

3.- División (Cociente).

$$\frac{4}{5} \div \frac{6}{7} =$$

$$\frac{10}{9} \div \frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{8}{3}\right) =$$

$$\left(\frac{10}{3}\right) \div \left(-\frac{12}{5}\right) =$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{5}{6}\right)\right] \div \left[\left(\frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{7}{9}\right)\right] =$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{11}{9}} =$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{11} =$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{11} =$$

$$\frac{0}{4} =$$

$$\frac{7}{0} =$$

$$\frac{0}{0} =$$

Operaciones Algebraicas. Adición (Suma), Sustracción (Resta), Producto (Multiplicación), División, Productos Notables y Factorización.

1.- Reducción de términos semejantes.

Definición.

Términos semejantes son aquellos que difieren únicamente en sus coeficientes.

Ejemplo:

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 4x^2 + xy - y^2 = 6x^2 - 2xy - 5x$$

Ejercicios.

$$23xy + 8bx^2 + 5xy + 9xz - 8bx^2 + 6xy =$$

$$10bc^2 + 5ab^3 + 12yc^2 - 7ab^3 - 10yc^2 + 8bc^2 =$$

$$8ab - 14bc - 9rt + 5rt + 5ab + 7bc + 9rt =$$

$$15c^2d^2 - bn^2 + 6fg + 14bn^2 - 15c^2d^2 + 9bn^2 =$$

$$12k^3l^5 - 14xb + 10mn + 14 + 16k^3l^5 + 9xb - 33mn =$$

2.- Adición (Suma).

Definición.

Es la operación que tiene por objeto reunir dos o más Expresiones algebraicas llamadas sumandos en una sola expresión llamada suma.

Ejemplo:

$$\left(5x^2 - 4x + 7\right) + \left(x + 2x^2\right) + \left(3 + 6x - x^2\right) = 6x^2 + 3x + 10$$

Ejercicios.

$$\left(4y^2 - \frac{4}{5}z + \frac{14}{5}\right) + \left(5z + \frac{1}{2}y^2 - 5\right) + \left(10 + 6y^2 - \frac{8}{3}z\right) =$$

$$\left(10x^3 - \frac{7}{3}y^2 - 4xy\right) + \left(\frac{3}{5}x^3 + 6y^2 + \frac{3}{2}xy\right) + \left(8xy + \frac{5}{4}x^3 + 12y^2\right) + \left(\frac{5}{2}xy + \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{7}y^2\right) =$$

$$\left(\frac{3}{7}\sqrt{x^3} + 5x^7 + \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{7}x^7 + \frac{8}{9}\sqrt{x^3} + 16\right) + \left(6\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^5 8\sqrt{x^3}\right) + \left(\frac{2}{3}x^5 - \frac{8}{5}\sqrt{x^3} + 12\right) =$$

$$\left(5\sqrt[7]{xy} - 3x + 25y^3 + \frac{\sqrt[4]{x}}{6}\right) + \left(\frac{4\sqrt[7]{xy}}{7} + 12x + \frac{7}{3}y^3 - \frac{\sqrt[4]{x}}{2}\right) + \left(\frac{x}{8} + 10y^3 + \frac{\sqrt[4]{x}}{9}\right) =$$

3.- Sustracción (Resta).

Definición.

Sustracción es la operación inversa de la adición y se define como sigue:

a – b = c si a = b + c; donde a es el minuendo, b es el sustraendo y c es la resta o diferencia.

Ejemplo:

$$\left(6x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + y^3\right) - \left(xy^2 - 4x^2y + 2x^3\right) = 4x^3 + 6x^2y - 4xy^2 + y^3$$

Ejercicios.

$$\left(9x^5 - 14x^3y + 10xy^3 - 7y^3\right) - \left(9xy^3 + 8x^3y - 15x^5\right) =$$

$$\left(11xy + \frac{1}{2}x^6 + 7y^5 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{xy}\right) - \left(\frac{7}{3}x + 9x^6 + \frac{2xy}{5}\right) - \left(12xy + 9\sqrt[3]{xy} + 8x^6 + \frac{2\sqrt[3]{xy}}{7}\right) =$$

$$\left(5x + 18xy + \frac{4}{7}x^4y^2\right) - \left(\frac{5xy}{7} + 10x - \frac{3x^4y^2}{8}\right) - \left(7x + 4yx + \frac{y^2x^4}{9}\right) =$$

$$\left(10xy + 14xy^3 + 15y^7x\right) - \left(9x^5y^2 - \frac{1}{6}y^7x + 13xy\right) - \left(\frac{x^5y^2}{7} - \frac{4}{3}xy^3 + 16xy\right) =$$

$$\left(\frac{3}{5}xy + \frac{8}{9}\sqrt[8]{y^3x} + \frac{4}{9}y^8x^2\right) - \left(5xy - \frac{\sqrt[8]{xy^3}}{9} + \frac{3}{7}y^8x^2\right) - \left(8xy + 9\sqrt[8]{y^3x} - \frac{3}{7}x^2y^8\right) =$$

4.- Leyes de los Exponentes.

Definición.

Si n es un número entero positivo y a es un número real cualquiera, entonces:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$

Donde a es la base y n es el exponente o potencia.

Definición.

Si n es un entero positivo y a ≠ 0 entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Definición.

Si a es un número real diferente de cero entonces:

$a^0 = 1$

Leyes.

$1.-\left(a^m a^n\right) = a^{m+n}$

$2.-\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = a^{m-n}$

$3.-\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

$4.-\left(ab\right)^n = a^n b^n$

$5.-\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplos:

$$1.-\left(a^{6}a^{4}\right)=a^{6+4}=a^{10}$$

$$2.-\left(\frac{a^{12}}{a^{7}}\right)=a^{12-7}=a^{5}$$

$$3.-\left(a^{3}\right)^{8}=a^{3(8)}=a^{24}$$

$$4.-\left(ab\right)^{9}=a^{9}b^{9}$$

$$5.-\left(\frac{a}{b}\right)^{13}=\frac{a^{13}}{b^{13}}$$

Ejercicios:

$$\left(b^{5}b^{8}\right)=$$

$$\left(d^{3}d^{5}\right)=$$

$$\left(\frac{c^{11}}{c^{4}}\right)=$$

$$\left(\frac{x^{32}}{x^{40}}\right)=$$

$$\left(k^{2}\right)^{6}=$$

$$\left(g^{7}\right)^{5}=$$

$$\left(bc\right)^{9}=$$

$$\left(hg\right)^{15}=$$

$$\left(\frac{d}{e}\right)^{7}=$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^{25}=$$

Producto (Multiplicación).
Definición.
La multiplicación tiene por objetivo encontrar un número P, el producto, que sea con respecto al multiplicando M, lo que el multiplicador m es con respecto a la unidad. En símbolos: P = M x m
Ejemplo:

$$(3x^3y)(-2xy) = -6x^4y^2$$
$$(xyz^2)(-4xy^2z)(-2x^2yz^2) = 8x^4y^4c^5$$

Ejercicios.

$$(x^6y^3z^4)(\sqrt[9]{x}\sqrt[4]{xy}) =$$
$$\left(\frac{6x^2y^5}{8}\right)\left(\frac{\sqrt[5]{xyz}}{6}\right) =$$
$$(6x^5y^7)(9x^2y^5z^3)(-3x^2y^7z^2) =$$
$$(-3xy^3)(7xy)(\sqrt[5]{xy}) =$$
$$\left(\frac{x^2y}{5}\right)(\sqrt[6]{xy})(\sqrt[7]{x^7y^{14}}) =$$

5.- División (Cociente).
Definición.
Es la operación inversa de la multiplicación; se establece de la siguiente manera, para b≠0:

$$\frac{a}{b} = c$$

Donde:
a es el dividendo, b el divisor y c es el cociente.

Ejercicios.

$$\frac{14x^6y^{10}z4}{2x^3y^5z^4} =$$
$$\frac{24x^6y^7 - 36x^3y^8 + 50x^{10}y^7}{2x^3y^3} =$$
$$\frac{15x^4 + 8x^3y - x^2y^2 - 3xy^3}{5x^2 + xy - 3y^2} =$$
$$\frac{am^4 - am - 2a}{am + a} =$$
$$\frac{8y^6 - 21x^3y^3 - x^6 - 24xy^5}{3xy - x^2 - y^2} =$$

6.- Productos Notables.

Los productos notables son:

a.- Cuadrado de una suma.

$$(z+x)^2 = z^2 + 2zx + x^2$$

$$(x+a)^2 =$$

$$(2y+3)^2 =$$

$$\left(\frac{x}{7}+y\right)^2 =$$

$$\left(5c+\frac{1}{4}d\right)^2 =$$

$$\left(\frac{5}{3}b+\frac{6}{7}c\right)^2 =$$

b.- Cuadrado de una diferencia.

$$(c-x)^2 = c^2 - 2cx + x^2$$

$$(x-a)^2 =$$

$$(2x-3y)^2 =$$

$$\left(\frac{2x}{5}-z\right)^2 =$$

$$\left(7w-\frac{1}{8}z\right)^2 =$$

$$\left(\frac{6}{7}r-s\right)^2 =$$

c.- Binomios conjugados.

$$(c+w)(c-w) = c^2 - w^2$$

$$(x+a)(x-a) =$$

$$(2s-1)(2s+1) =$$

$$(z^2-3w)(z^2+3w) =$$

$$(4m+7t)(4m-7t) =$$

$$\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b\right) =$$

d.- Producto de dos binomios que tienen un término común.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(x+d)(x-e)=$$
$$(3y+5z)(7y-2w)=$$
$$(2r+4s)(6r-t)=$$
$$(7a+5b)(3a-7c)=$$
$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{7}{5}y\right)\left(\frac{5}{8}x-\frac{3}{4}z\right)=$$

e.- Producto de dos binomios con un término semejante y el otro no común.

$$(3a+h)(2a+f)=$$
$$(5b+d)(4b+c)=$$
$$(6x+a)(8x+s)=$$
$$(4d+2s)(5d+7t)=$$
$$(2w+2x)(7w+9y)=$$
$$\left(\frac{5}{3}y+\frac{4}{7}x\right)\left(\frac{6}{4}y+\frac{5}{9}z\right)=$$

f.- Cubo de la suma de un binomio.

$$(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+b^3$$
$$(y+z)^3=$$
$$(x+2y)^3=$$
$$(2b+3w)^3=$$
$$(2a+4c)^3=$$
$$\left(\frac{1}{5}d+\frac{5}{2}h\right)^3=$$

g.- Cubo de la diferencia de un binomio.

$$(x-a)^3=x^3-3x^2a+3xa^2-b^3$$
$$(3x-d)^3=$$
$$(x-5c)^3=$$
$$(3r-7t)^3=$$
$$(4y-6x)^3=$$
$$\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{7}y\right)^3=$$

h.- Factores cuyo producto da una suma de cubos.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(x+d)(x^2-xd+d^2)=$$
$$(x+a)(x^2-xa+a^2)=$$
$$(b+c)(b^2-bc+c^2)=$$
$$(f+g)(f^2-fg+g^2)=$$
$$(z+u)(z^2-zu+u^2)=$$

i.- Factores cuyo producto da una diferencia de cubos.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(p-r)(p^2+pr+r^2)=$$
$$(q-c)(q^2+qc+c^2)=$$
$$(u-t)(u^2+ut+t^2)=$$
$$(x-z)(x^2+xz+z^2)=$$
$$(r-w)(r^2+rw+w^2)=$$

j.- Producto de dos binomios que no tienen un término común.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$
$$(3a+2c)(5d+7b)=$$
$$(7r+2s)(4t+8u)=$$
$$(6k+3l)(5m+9n)=$$
$$(8w+9f)(3x+7z)=$$
$$(4g+3m)(5u+9t)=$$

7.- Factorización.

La factorización consiste en que dada una expresión algebraica que es el producto de ciertos factores, puedan determinarse éstos. Los casos más generales se presentan a continuación:

a.- Monomio factor común.

Ejemplo:

$$ax+ay-az=a(x+y-z)$$

Ejercicios:

$$cx+cy-cz=$$
$$3x^2k+9kx^5-6kx^3=$$
$$8a^5x^2y^3-6a^5b^3yz-2a^5b^4xy^2z^2=$$
$$8a^3b^4c-12ab^4c^5d+4b^4c^2d^2=$$
$$-9x^4y-4x^4y^3-12yhx^4=$$

b.- Diferencia de cuadrados.

Ejemplo:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejercicios:

$$x^4 - 1 =$$

$$3x^2 - 3 =$$

$$16x^2 - 9 =$$

$$x^6 - y^6 =$$

$$x^2 - y^2 =$$

c.- Trinomio cuadrado perfecto.
Deben existir los cuadrados de dos expresiones con signo positivo y, el doble producto de ellas con signo más o menos. Este caso corresponde a los productos notables a y b.

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

Ejemplo:

$$y^2 - 2by + b^2 = (y-b)^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 =$$

$$3x^2 + 6x + 3 =$$

$$a + 2\sqrt{a}z + z^2 =$$

$$9 - 6w + w^2 =$$

$$z^2 - 2z\sqrt{15} + 15 =$$

d.- Polinomio de cuatro términos en el que aparece un producto notable.
Ejemplo:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Ejercicios:

$$ht + hu + kt + ku) =$$

$$kb + kd + zb + zd =$$

$$mp + gp + mq + qg =$$

$$va + wa + bv + wb =$$

$$nc + qn + cm + qm =$$

Sesión 3.- Radicales y Logaritmos.

3.1.- Radicales.
Definición.
Si $a^n = b$ entonces a se denomina la n-ésima raíz de b.
Como $a^n = b$ entonces $a = \sqrt[n]{b}$
Donde:
El signo del radical es $\sqrt{\ }$, n es el índice y b es el radicando.
Leyes.

$$1.- \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$
$$2.- \left(a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x}\right) = (a+b)\sqrt[n]{x}$$
$$3.- \left(\sqrt[n]{ab}\right) = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$
$$4.- \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$b \neq 0$
$$5.- \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$$

Ejercicios:

$$1.- \left(\sqrt[4]{6}\right)^4 =$$
$$2.- \left(h\sqrt[3]{y} + f\sqrt[3]{y}\right) =$$
$$3.- \left(\sqrt[5]{9w}\right) =$$
$$4.- \left(\sqrt[7]{\frac{16}{a}}\right) =$$
$$5.- \left(\sqrt[3]{65}\right)^5 =$$

3.2.- Logaritmos de Base b.
Propiedades.
Si b, M y N son números reales positivos, b ≠ 1, y además para x y p números reales, entonces:
1.- $\log_b 1 = 0$
2.- $\log_b b = 1$
3.- $\log_b b^x = x$
4.- $b^{\log_b x} = x \quad x > 0$
5.- $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$
5.1.- $\log_b(M + N) \neq \log_b M + \log_b N$
6.- $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
6.1.- $\frac{\log_b M}{\log_b N} \neq \log_b M - \log_b N$

7.- $\log_b(M^p) = p\log_b M$
8.- $\log_b(M) = \log_b N$ si y solo si M = N
Ejercicios:

$$\log 1 =$$
$$\log_6 6 =$$
$$\log_5 5^2 =$$
$$\log 10^3 =$$
$$\log x^{0.885} =$$
$$4^{\log_4 5} =$$
$$9^{\log_9 7} =$$
$$\log(5) + \log(7) =$$
$$\log_3(12) + \log_3(3) =$$
$$\log(10) - \log(4) =$$
$$\log_7(15) - \log_7(5) =$$
$$9\log(7) + 5\log(23) =$$
$$2 + 10\log(1.05) =$$

3.4.- Logaritmos Naturales.
Definición:
Para cualquier número positivo x:

$$\text{Ln } x = \log_e x$$

Propiedades:
1.-$\ln(MN) = \ln(M) + \ln(N)$

2.- $\ln\left(\frac{M}{N}\right) = \ln(M) - \ln(N)$

3.- $\ln(a^k) = (k)\ln(a)$
4.- $\ln(e) = 1$
5.- $\ln(e^x) = x$
6.- $\ln(1) = 0$

Sesión 4.- Monomios y Polinomios.
Definición.
Un monomio es una expresión algebraica que contiene un solo término.

Ejercicios.

$$\left(8x^3y^2z\right)\left(7x^2y^3z^3\right)\left(-3x^4y^5z^2\right)=$$

$$\left(5ab^6c^2\right)\left(4a^2b^3c^4\right)\left(-6a^3b^5c^3\right)=$$

$$\left(\frac{3x^5w^3y^4}{5}\right)\left(\frac{6x^3y^5w^7}{6}\right)\left(\frac{w^2x^4y^3}{4}\right)=$$

$$\left(9d^7c^5b^2\right)\left(8b^4d^3c^2\right)\left(\frac{1}{bcd}\right)=$$

$$\left(\frac{5}{k^3m^7p^8}\right)\left(\frac{m^5p^3k^2}{4}\right)\left(\frac{k^3m^4p^6}{3}\right)=$$

Definición.
Un polinomio es una expresión de la forma siguiente:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots.. + a_1x + a_0$$

Ejercicios.
Con las siguientes funciones:

$$f(x)=3x^2y-2x+1$$
$$g(x)=4x^2y+6x-3$$

$$f(x)=5x^8-4x^5-15x^4-8x^3$$
$$g(x)=10x^5+9x^4+12x^3+9x^2$$

$$f(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{3}x^6+\frac{7}{5}x^3-\frac{9}{2}x^7$$
$$g(x)=2x^3+9x^5+3x^2+x^6$$

$$f(x)=\frac{7}{4}x^8+\frac{1}{7}x^4-\frac{11}{6}x^3$$
$$g(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x+\frac{5}{6}x^4$$

Efectuar el producto de f(x) con g(x).

Sesión 5.- Ecuaciones Lineales e Inecuaciones lineales.
Definición:
Una ecuación es un enunciado de igualdad entre dos expresiones.

Propiedades de la igualdad:
1.- Reflexiva: a = a

2.- Simétrica: Si a = b, entonces b = a.

3.- Transitiva: Si a = b y b = c, entonces a = c.

4.- Adición: Si a = b, entonces a + c = b + c.

5.- Sustracción (Resta): Si a = b, entonces a – c = b – c.

6.- Producto (Multiplicación): Si a = b, entonces ac = bc.

7.- Cociente (División): Si a = b, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

5.1.- Ecuación Lineal con una variable.

Definición:

Cualquier ecuación que se escribe de la siguiente forma:

$$ax + b = 0 \qquad a \neq 0$$

Se denomina ecuación lineal o de primer grado con una variable y donde a y b son números reales.
Resolver una ecuación en x significa determinar el valor de x para los cuales la ecuación es verdadera, es decir, determina la solución de la ecuación.

Ejercicios:

Graficar las siguientes funciones:

$$8x - 7 = 9$$

$$6x + 7 = 10$$

$$\frac{3}{2}x + 5 = 20$$

$$-4x + \frac{4}{3} = 16$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6}x = 4$$

5.2.- Inecuacion (Desigualdad) Lineal.

Definición: Una desigualdad Lineal es aquella que se escribe de la siguiente forma:

1) $ax + b < 0$
2) $ax + b \leq 0$
3) $ax + b > 0$
4) $ax + b \geq 0$

Donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Una solución de una desigualdad en x es un valor de x para el que la desigualdad es verdadera, el conjunto de todas las soluciones de una desigualdad es el conjunto solución de la desigualdad.
Una desigualdad lineal tiene una infinidad de soluciones.

Propiedades de las Desigualdades:
Para cualquiera de los números reales a, b y c.
1.- Propiedad de Transitividad:
Si a $<$ b y b $<$ c, entonces a $<$ c.

2.- Propiedad de la Suma:
Si a $<$ b, entonces a +c $<$ b + c

3.- Propiedad de la Resta:
Si a $<$ b, entonces a – c $<$ b – c

4.- Propiedad del Producto (Multiplicación):
Si a $<$ b y c es positivo, entonces ac $<$ bc
Si a $<$ b y c es negativo, entonces ac $>$ bc

5.-Propiedad del Cociente (División):
Si a $<$ b y c es positivo, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
Si a $<$ b y c es negativo, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
Propiedades similares se cumplen cuando el signo de la desigualdad se invierte o si reemplaza $<$ por $\leq$ y se reemplaza $>$ por $\geq$.
Ejercicios:
Graficar las siguientes inecuaciones:

$$2(x-3) < 4$$

$$3-2x \leq 6$$

$$\frac{3}{2}(s-2)+1 > -2(s-4)$$

$$\frac{x+1}{3} - \frac{1}{2} \leq 2$$

$$-(5x+2) < -(2x+4)$$

Sesión 6.- Sistemas de Ecuaciones Lineales y Sistemas de Inecuaciones Lineales.
6.1.- Sistemas de Ecuaciones Lineales.

A un conjunto finito de ecuaciones lineales con las variables x_1, x_2, …., x_n se le conoce como Sistema de Ecuaciones Lineales o Sistema Lineal. A la sucesión de números s_1, s_2,….s_n, se la llama solución del sistema cuando $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, …., $x_n = s_n$.

Cuando un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución se llama consistente, en caso de que no tenga solución se dice que el sistema es inconsistente. Los métodos para resolver los ejercicios son: Suma y Resta, Igualación, Sustitución y Cramer.

Ejercicios.

Resolver y graficar los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$3x-4y=13$$
$$3y+2x=3$$

$$3x+y=7$$
$$2x+2y=-2$$

$$5v+2w=36$$
$$8v-3w=-54$$

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=2$$
$$\frac{3}{8}x+\frac{5}{6}y=-\frac{11}{2}$$

$$\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}y=-4$$
$$\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y=8$$

Con la expresión:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$$

Construir una Ecuación con pendiente negativa y una con pendiente positiva.

Solución:

Sean los puntos:

(-3, 8) y (4, -2)

$$y-8=\frac{-2-8}{4-(-3)}\left(x-(-3)\right)$$

$$y-8=\frac{-10}{7}\left(x+3\right)$$

$$y-8=-\frac{10}{7}x-\frac{30}{7}$$

$$y=-\frac{10}{7}x-\frac{30}{7}+8$$

$$y=-\frac{10}{7}x+\frac{26}{7}$$

Sean los puntos:

(1, 4) y (8, 7)

Solución:

$$y-4=\frac{7-4}{8-1}\left(x-1\right)$$

$$y-4=\frac{3}{7}\left(x-1\right)$$

$$y-4=\frac{3}{7}x-\frac{3}{7}$$

$$y=\frac{3}{7}x-\frac{3}{7}+4$$

$$y=\frac{3}{7}x+\frac{25}{7}$$

6.2.- Sistemas de Inecuaciones (Desigualdades) Lineales.

A un conjunto finito de desigualdades lineales de la forma:
1.- ax + b < 0
2.- ax + b ≤ 0
3.- ax + b > 0
4.- ax + b ≥ 0
Se lo conoce como Sistema de Desigualdades Lineales.
Un sistema de Desigualdades Lineales tiene un número infinito de soluciones.
Los métodos para resolver los ejercicios son: Suma y Resta, Igualación, Sustitución y Cramer.

Ejercicios.
Resolver y graficar las siguientes Inecuaciones:

$$2x+2y+3<0$$
$$-x+y+3<0$$

$$x-y\geq 1$$
$$2x+3y\leq 5$$

$$3x+5y<0$$
$$-2x+3y\geq 6$$

$$4x+7y\leq 38$$
$$6x+3y\leq 42$$

$$x+y\leq 2$$
$$-2x+2y>4$$

Sesión 7.- Funciones.

Definición:
Si a cada valor de la variable x, le corresponde un solo valor determinado de otra variable y, entonces ésta será función de x, se puede escribir de la siguiente manera:

y = f(x), y = g(x), φ(x), ω(x), etc.

La variable x se denomina variable independiente o argumento de la función y, la variable y es la variable dependiente
El conjunto de los valores de x para los cuales se determinan los valores de la función y, se llama dominio de definición de la función y a los valores que adquiere la variable y se le denomina rango de la función.
Ejercicios: Obtener el Dominio y Rango de las siguientes funciones:

$$y = -2x + 2$$
$$y = 3x - 5$$
$$y = x + 1$$
$$f(x) = \sqrt{5x - 15}$$
$$f(x) = \frac{4}{3x - 18}$$

7.1.- Funciones Polinómicas.
Una función polinomial de grado n es una función cuya regla está dada por un polinomio de grado n.
La función:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

Se conoce como función polinomial de n ésimo grado. También se hace referencia a P(x) como polinomio de grado n o simplemente como polinomio.
Los números $a_n, a_{n-1} \ldots\ldots a_1 x, a_0$ se llaman coeficientes de la función.
Una función constante, diferente de cero, es un polinomio de grado cero.
La función cero, es decir, Q(x) = 0 también se le considera un polinomio, pero no se le asigna un grado.
Las operaciones algebraicas que se realizan con los polinomios son:
1.- Suma.
2.- Resta.
3.- Multiplicación.
4.- División.
Ejercicios.
1.- Con las funciones:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$$
$$g(x) = 5x^2 + 6x^3 - 1$$

$$f(x) = -7x^2 + 8x + 14$$
$$g(x) = 12x^2 + 6x - 10$$

$$f(x) = 9x^4 - 5x^2$$
$$g(x) = -3x^2 - 8x^4 + 16$$

$$f(x) = -12x^5 - 9x^3 + 20$$
$$g(x) = -5x^4 + 4x^2 + 7$$

Realizar las operaciones de Suma, Resta y Multiplicación.

2.- Sean las funciones:

$$f(x) = 2x^3 - 14x - 5$$
$$g(x) = x - 3$$

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6$$
$$g(x) = -3x + x^2 + 3$$

$$f(x) = x^5 + 7x^3 - 5x + 1$$
$$g(x) = x^3 - 2x$$

Efectuar f(x) entre g(x).

Sesión 8.- Funciones Exponenciales y Logarítmicas.
8.1.- Funciones Exponenciales.
Definición:
SI b es una constante positiva diferente de uno, entonces la función:

$f(x) = b^x$

Define una función exponencial para cada b constante diferente, llamada base.
La variable independiente asume cualquier valor real, es decir, el dominio son todos los números reales y el rango de la función son los reales positivos.
Un caso particular es el de la función exponencial de base e.
Definición:
Para un número real x, la ecuación:

$f(x) = e^x$ ó $f(x) = e^{-x}$

Es la función exponencial de base e.
Ejemplos:

$$f(x)=4^x$$
$$f(x)=6^x$$
$$f(x)=5.7^x$$
$$f(x)=\left(\sqrt{7}\right)^x$$
$$f(x)=\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^x$$
$$f(x)=e^{4x}$$
$$f(x)=e^{\sqrt{x}}$$
$$f(x)=e^{-2x}$$
$$f(x)=e^{\sqrt[3]{5x}}$$

Graficar:

$$f(x)=e^x$$
$$f(x)=10^x$$

1.- Con las siguientes funciones:

$$f(x)=e^{2x}+e^{5x}$$
$$g(x)=e^{3x^2}+e^{4x}$$

$$f(x)=e^{-9x}-e^{3x}$$
$$g(x)=e^{-7x^3}-e^{2x}$$

$$f(x)=e^{2x^4}+e^{3x^3}$$
$$g(x)=e^{5x^2}-e^{6x^4}$$

Efectuar: f(x) ·g(x).

2.- Realizar:

$$f(x)=\frac{e^{-8x^3}+e^{-6x}}{e^{4x}}$$

$$g(x)=\frac{e^{15x^3}-e^{10x^5}}{e^{5x^2}}$$

$$f(x)=\frac{e^{x^6}-e^{7x}+e^{4x^8}}{e^{8x^6}}$$

8.2.- Funciones Logarítmicas.

Las funciones logarítmicas son las funciones inversas de las funciones exponenciales.

Definición:

Un logaritmo se define como:

$Y = \log_b x$

Que significa:

$X = b^y$ donde $b > 0$, $b \neq 1$

El número $\log_a x$ es la potencia y a la cual se eleva a para obtener el valor de x. El número a se llama base logarítmica.

Ejercicios:

$$y=\log(8x)$$
$$y=\log(2x-2)$$
$$y=\log(3x+4)$$
$$y=\log\left(\frac{4}{3}x-9\right)$$
$$y=\log\left(\frac{6}{7}x+\frac{5}{8}\right)$$

Graficar:

$$f(x)=\log(x)$$
$$f(x)=\ln(x)$$

Obtener el valor de x en las siguientes funciones:

$$2^{2x-1}=4$$

$$2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$$

$$10^{x+2}=5$$

$$3^{x^2-1}=134$$

$$\sqrt[3]{8^x}=65536$$

$$\sqrt[2x-1]{3^{x-3}}=\sqrt{27}$$

$$5+3(4)^{x-1}=12$$

$$2^{3x-8}=2^{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-2}=2^{x-2}$$

$$\left(\sqrt{\frac{6}{13}}\right)^{x-3}=30$$

9.- Números Complejos (Imaginarios)

En el conjunto de los números reales, los números negativos no tienen raíz cuadrada, así por ejemplo $\sqrt{-100}$ no tiene solución.

Los números imaginarios permiten solución usando una unidad imaginaria i, donde (por acuerdo) $I^2 = -1$ ó $i = \sqrt{-1}$

Expresamos entonces

$$\sqrt{-100} = \sqrt{(-1)(100)}$$
$$\sqrt{-100} = \sqrt{-1}\sqrt{100}$$
$$\sqrt{-100} = i10$$
$$\sqrt{-100} = 10i$$

Potencias de i:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = (i)(i) = \left(\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = -1$$
$$i^3 = (i^2)(i) = (-1)\left(\sqrt{-1}\right) = -i$$
$$i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1$$

NÚMEROS COMPLEJOS: Consisten en las sumas de números a + b i donde a y b son números reales, i es la parte imaginaria. Así a es la parte real y bi la parte imaginaria.

Ejemplos:

$1.-(47i)(2) = 94i$

$2.-\left(\sqrt{-5}\right)(2i) = \left(i\sqrt{5}\right)(2i) = \left(2i^2\right)\left(\sqrt{5}\right) = -2\sqrt{5}$

$3.-\left(-\sqrt{-3}\right)\left(\sqrt{-7}\right) = (-i)\left(\sqrt{3}\right)(i)\left(\sqrt{7}\right) = \left(-i^2\right)\left(\sqrt{21}\right) = -(-1)\left(\sqrt{21}\right) = \sqrt{21}$

$4.-(7i+9i) = (7+9)(i) = 16i$

$5.-(-5+6i)+(2-11i) = -5+2+6i-11i = -3-5i$

Estos números nos permiten resolver ecuaciones de segundo grado como $x^2+1=0$