



II.- Probabilidad

Definición de Probabilidad

- ▶ La probabilidad es el estudio de los experimentos aleatorios o no determinísticos.

Experimentos determinísticos y aleatorios

▶ Experimentos determinísticos.

Son aquellos que se realizan de una misma forma y con las mismas condiciones iniciales, en el cual siempre se obtiene el mismo resultado.

▶ Experimentos aleatorios.

Son aquellos en los cuales no se puede predecir el resultado final.

Un experimento aleatorio cumple con las siguientes condiciones:

- a) Con las mismas condiciones, se pueden repetir de manera indefinida.
- b) No se puede predecir el resultado que se va a obtener, antes de llevarlo a cabo.
- c) El resultado obtenido, pertenece a un conjunto de posibles resultados, el cual se conoce como espacio muestral.

Cualquier subconjunto del espacio muestral es conocido como suceso aleatorio.

Evento seguro e imposible

▶ **Evento o suceso seguro.**

Es aquel que siempre se verifica después de llevar a cabo el experimento aleatorio, es decir, el mismo espacio muestral.

Es el que se verifica por todos los resultados del experimento. Se simboliza por Ω .

▶ **Evento o suceso imposible.**

Es aquel que nunca se verifica como resultado del experimento aleatorio. Al ser un subconjunto del espacio muestral, la única posibilidad es que el suceso imposible sea el conjunto vacío, el cual se simboliza por medio de ϕ .

II.1.- Probabilidad Clásica o de Laplace

▶ **Definición.**

La probabilidad de un suceso A de un experimento aleatorio en el que todos sus sucesos elementales son equiprobables, es igual al número de casos favorables al suceso A dividido por el número de casos posibles del experimento.

II.2.- Probabilidad Subjetiva

▶ **Definición.**

En los fenómenos aleatorios, en los que no existe la posibilidad de repetición o experimentación, la probabilidad subjetiva es la cuantificación que una persona hace de un evento, utilizando la información que tiene.

II.3.- Probabilidad Axiomática

▶ El concepto de probabilidad axiomática fue hecho por Kolmogorov en 1933, para ello precisó los axiomas que debe de cumplir un función de probabilidad, los cuales son:

1. La probabilidad sólo puede tomar los valores comprendidos entre cero y uno.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. La probabilidad del evento seguro es uno.

$$P(A) = 1$$

II.3.- Probabilidad Axiomática

- ▶ El concepto de probabilidad axiomática fue hecho por Kolmogorov en 1933, para ello precisó los axiomas que debe de cumplir un función de probabilidad, los cuales son:

3. La probabilidad de dos sucesos ajenos, disjuntos o mutuamente excluyentes, es la suma de sus probabilidades respectivas.

Ya que si:

$$\mathbf{A \cap B = \emptyset}$$

Entonces:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Con los tres axiomas anteriores se está en la posibilidad, para deducir todas las reglas que se espera tener de una función de probabilidad.

II.3.- Probabilidad Axiomática

- ▶ El concepto de probabilidad axiomática fue hecho por Kolmogorov en 1933, para ello precisó los axiomas que debe de cumplir un función de probabilidad, los cuales son:

4. La probabilidad de la intersección de dos sucesos es menor o igual que la probabilidad de cada uno de los sucesos por separado, es decir,

$$\mathbf{P(A \cap B) \leq P(A)} \quad \text{y} \quad \mathbf{P(A \cap B) \leq P(B)}$$

5. La probabilidad de unión de sucesos es mayor que la de cada uno de los sucesos por separado:

$$\mathbf{P(A \cup B) \geq P(A)} \quad \text{y} \quad \mathbf{P(A \cup B) \geq P(B)}$$

6. La probabilidad del suceso complementario del evento A es:

$$\mathbf{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

Teoremas de Probabilidad

- I. Si A y A^c son eventos complementarios de un espacio muestral S , entonces:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Demostración:

$$A \cup A^c = S$$

Como:

$$1 = P(S)$$

Entonces:

$$1 = P(A \cup A^c)$$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

Por lo tanto:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Teoremas de Probabilidad

2. $P(\emptyset) = 0$

Para un espacio muestral S cualquiera.

Ya que:

$$S \cup \emptyset = S$$

De donde podemos deducir:

$$P(S) = P(S \cup \emptyset)$$

$$P(S) = P(S) + P(\emptyset)$$

$$P(S) - P(S) = P(\emptyset)$$

Por lo tanto:

$$P(\emptyset) = 0$$

Teoremas de Probabilidad

3. Si A y B son eventos de un espacio muestral S y $A \subset B$,

Entonces:

$$P(A) \leq P(B)$$

4. Si A y B son dos eventos cualesquiera en el espacio muestral S, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Si A, B y C son tres eventos cualesquiera de un espacio muestral S, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

II.4.- Probabilidad Condicional

▶ Definición.

Sean **A** y **B** dos sucesos cualesquiera con $P(\mathbf{B}) > 0$. Se define la probabilidad del suceso A condicionada al suceso B y se representa por $P(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

II.5.- Eventos Independientes

- ▶ Dos sucesos **A** y **B** se dice que ocurren de manera independientemente uno del otro si la ocurrencia o no de uno de ellos no influye en la ocurrencia o no del otro.

- ▶ Definición.

Los sucesos A y B se dicen independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Lo que equivale a que

$$\text{Ó bien } P(B|A) = P(B)$$

si

$$P(A) > 0$$

Si **A** y **B** son sucesos independientes, también lo son **A** y **B^c**.

En efecto,

$$P(A \cap B^c) = P(A - A \cap B) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$$

II.6.- Teorema de Bayes

Si los eventos $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ constituyen una división del espacio muestral \mathbf{S} , donde

$\mathbf{P}(\mathbf{B}_i) \neq \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, k$, entonces para cualquier evento \mathbf{A} en \mathbf{S} es tal que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}$$

Para $r = 1, 2, \dots, k$

Esto permite hallar las probabilidades de los diferentes sucesos B_1, B_2, \dots, B_n que pueden causar la ocurrencia de A . Por esta razón con frecuencia se hace referencia al teorema de Bayes como el teorema sobre la probabilidad de causas.

Ejercicios de probabilidad axiomática

1. De un total de 100 personas, 40 solo estudian, 20 trabajan y 10 estudian y trabajan. Si se elige a una persona al azar, calcular la probabilidad de que estudie o trabaje.
2. En una encuesta selectiva entre 200 personas que habían comprado un televisor, 27 compraron la marca Sonny y 72 la marca Sanyo. Calcular la probabilidad de que un elemento de la muestra:
 - a) Comprara un televisor marca Sonny.
 - b) Comprara un Sonny o un Sanyo.
 - c) No comprara ninguna de esas marcas.

Ejercicios de probabilidad axiomática

3. En una compañía de 1500 empleados, 250 están en la sección de atención a clientes y, 100 están en la sección de ventas al mayoreo. Calcular la probabilidad de que el empleado:
 - a) No este en la sección de atención a clientes.
 - b) No este en la sección de ventas al mayoreo.
 - c) Este en la sección de atención al cliente o en la sección de ventas al mayoreo.

4. La probabilidad de que una persona, en un centro comercial, compre una camisa marca Aristos es del 60%, de que compre un pantalón marca Jethro es del 15% y, la probabilidad de que compre ambas cosas es del 5%. Calcular la probabilidad de que la persona:
 - a) Compre el pantalón o la camisa.
 - b) No compre el pantalón.

Ejercicios de Tarea de probabilidad axiomática

5. De un total de 100 estudiantes, 30 estudian química, 20 estudian música y 10 estudian química y música. Si se elige un estudiante al azar, calcular la probabilidad de que estudie química o música.
6. La probabilidad de que una industria se ubique en la ciudad A es del 70%, de que se ubique en la ciudad B es del 40% y de que se encuentre en ambas es del 80%. ¿Cuál es la probabilidad de que de que se localice:
 - a) En ambas ciudades?
 - b) En ninguna de ellas?

Ejercicios de Tarea de probabilidad axiomática

7. En una encuesta selectiva entre 180 personas que habían comprado un auto, 27 compraron Chrysler y 72 Ford. Calcular la probabilidad de que un elemento de la muestra:
- Comprara un Ford.
 - Comprara un Ford o un Chrysler.
 - No comprara ninguna de esas marcas.
8. En un grupo de 1400 empleados, 30 tuvieron accidentes y 50 tuvieron licencia de uno ó más días por enfermedad en un cierto periodo. De los accidentados, 15 faltaron uno o más días. Calcular la probabilidad de que un empleado:
- Tenga un accidente o falte por enfermedad.
 - Estuviera enfermo por razones no relativas a un accidente.
 - No sufra accidente.

Ejercicios de Tarea de probabilidad axiomática

9. La probabilidad de que un cliente de una estación de servicio compre gasolina es del 71%; de que compre aceite es de 9%; y de que compre ambos es de 4%. Calcular la probabilidad de que un cliente:
- a) Comprará aceite o gasolina.
 - b) No adquiera gasolina.
 - c) Compre sólo gasolina.

Ejercicios de probabilidad condicional

1. Sean A y B dos eventos con las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 3/8, \quad P(B) = 5/8, \quad \text{y} \quad P(A \cup B) = 3/4$$

Obtener: $P(A | B)$ y $P(B | A)$

2. En una encuesta realizada en el D.F. se ha determinado que el 40% de los encuestados lee el periódico La Prensa, el 15% lee El Esto y el 3% lee ambos periódicos. Seleccionado al azar un lector de El Esto, calcular la probabilidad de que lea La Prensa.

Ejercicios de probabilidad condicional

3. La probabilidad de que un vuelo de programación regular despegue a tiempo es de 83%; la de que llegue a tiempo es 82% y la de que despegue y llegue a tiempo es del 78%. Calcular la probabilidad de que un avión:
- Llegue a tiempo dado que despegó a tiempo.
 - Despegue a tiempo dado que llegó a tiempo.
4. En determinada Universidad, el 25% de los estudiantes reprobó matemáticas, el 15% reprobó química, y el 10% reprobó tanto matemáticas como química. Se selecciona un estudiante al azar.
- a.- Si reprobó química, ¿cuál es la probabilidad de que haya reprobado matemáticas?
 - b.- Si reprobó matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya reprobado química?
 - c.- ¿Cuál es la probabilidad de que haya reprobado matemáticas o química?

Ejercicios de probabilidad condicional

5. Un espacio muestral de 200 adultos se clasifica de acuerdo con su sexo y nivel de educación:

Educación	Hombre	Mujer
Primaria	38	45
Secundaria	28	50
Bachillerato	22	17

Se selecciona aleatoriamente a una persona de este grupo, calcular la probabilidad de que:

- Sea hombre dado que tiene educación de nivel secundaria.
- No tiene grado (se considera grado a partir del bachillerato) dado que es mujer.

Ejercicios de probabilidad condicional

6. Suponga que de todos los individuos que compran una computadora personal, 60% obtiene un programa procesador de palabras en su compra, 40% un programa de hoja de cálculo y 30% ambos programas. Se elige al azar un comprador como el individuo seleccionado obtuvo un programa de hoja de cálculo, calcular la probabilidad de que también obtenga un programa procesador de palabras.

Ejercicios de probabilidad condicional

7. La siguiente tabla:

	Ascendidos	No ascendidos	Total
Hombre	300	550	850
Mujeres	50	298	348
Total	350	848	1198

Muestra los ascensos de personal que labora en una dependencia gubernamental.

¿Cuál es la probabilidad de obtener una promoción, dado que la persona es hombre y cuál es la probabilidad de obtener una promoción dado que la persona es una mujer?

Ejercicios de probabilidad condicional

8. Existen 80 aspirantes a un puesto de gerente para la compañía WT. De entre los aspirantes al puesto hay personas que tienen experiencia previa y algunos otros tienen una preparación académica el cuadro siguiente:

	Sin Formación Académica	Con Formación Académica
Experiencia Previa	15	18
Sin experiencia Previa	10	37

Nos muestra la composición de las aspirantes al puesto de gerente.

Calcular la probabilidad de elegir a alguien con experiencia previa si ha tenido formación académica.

Ejercicios eventos independientes

1. La probabilidad de que la señora de la casa esté cuando una representante de Avon llama es del 60%. Si se encuentra, la probabilidad de que realice una compra es del 40%. Calcular la probabilidad de que la señora este en casa y de que realice una compra cuando la representante de Avon llame.
2. La probabilidad de que un doctor diagnostique en forma correcta una enfermedad es del 70%. Cuando el doctor hace un diagnóstico incorrecto, la probabilidad de que de que un paciente presente una demanda es del 90%. ¿Cuál es la probabilidad de que el doctor haga un diagnóstico incorrecto y el paciente presente una demanda?

Ejercicios eventos independientes

3. Una empresa de publicidad decide hacer una campaña sobre un producto de unos almacenes.
Las probabilidades de éxito en los tres medios que utiliza son:
 $P(\text{T.V}) = 0.7$; $P(\text{Radio}) = 0.6$; $P(\text{Carteles}) = 0.4$
La campaña se realizó simultáneamente y de forma independiente entre ellas.
Calcular la probabilidad de tener éxito en algún medio.
4. Un hombre y una mujer se casan a los 20 años de edad. Las probabilidades de que lleguen a los 70 años son: 76% para el hombre de 82% para la mujer.
Se pregunta cuál es la probabilidad de que a los 70 años:
- a) Ambos estén vivos.
 - b) No viva ninguno de los dos.
 - c) Viva solamente la mujer.
 - d) Viva al menos uno de ellos.

Ejercicios de teorema de Bayes

1. En cierta Facultad, el 5% de los hombres tienen un promedio mayor a 9.5 y el 8% de las mujeres también lo tienen. El 45% de los estudiantes son mujeres, si se selecciona al azar un estudiante y tiene un promedio mayor a 9.5, ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea mujer?
2. En una Universidad el 15% de los estudiantes son de Filosofía y Letras, el 30% de Ciencias y el 55% de Contaduría y Administración. Se saben que finalizan los estudios el 30% de los de Filosofía y Letras, el 40% de los de Ciencias y el 60% de los de Contaduría y Administración. Elegido un alumno al azar, se pide:
 - a) Calcular la probabilidad de que el alumno finalice sus estudios Si se sabe que el alumno elegido ha terminado sus estudios. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de:
 - b) Filosofía y Letras?
 - c) Ciencias?
 - d) Contaduría y Administración?

Ejercicios de teorema de Bayes

3. Han sido propuestos como candidatos para Jefe de Gobierno del Distrito Federal, las siguientes personas: Marcelo Ebrard, Demetrio Sodi y Beatriz Paredes. La probabilidad de que el señor Ebrard sea elegido es del 60%; la probabilidad de que gane el señor Sodi es del 25% y la probabilidad de que gane la señora Paredes es del 15%. Si se elige al señor Ebrard la probabilidad de que baje la delincuencia es del 30%, si se elige al señor Sodi la probabilidad es del 20% y del 15% si gana la señora Paredes. ¿Cuál es la probabilidad de que baje la delincuencia? Si ésta ha bajado. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido al señor Ebrard Jefe de Gobierno del Distrito Federal? ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido al señor Sodi como Jefe de Gobierno del Distrito Federal? ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido a la señora Paredes como Jefe de Gobierno del Distrito Federal?

Ejercicios de teorema de Bayes

4. Tres máquinas A, B y C producen el 50%, el 30% y el 20% respectivamente del total de los objetos de una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son 3%, 4% y 5% respectivamente. Si se selecciona un objeto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que este objeto esté defectuoso? ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina A?
5. Se tienen tres computadoras para reenviar mensajes, la computadora A reenvía correctamente el 85% de los mensajes, la computadora B lo hace con el 90% y la computadora C con el 80%. Un día al azar se reenvía un mensaje. ¿Cuál es la probabilidad de que se utilizará la computadora A? ¿La computadora B? ¿La computadora C?

Ejercicios de teorema de Bayes

6. En la fabricación de Diskettes intervienen cuatro sectores, de los cuales el sector uno tiene una probabilidad de fallo del 2%, el sector dos tiene una probabilidad de falla del 3%, el sector tres la probabilidad de fallo es del 2.5% y finalmente del sector cuatro la probabilidad de fallar es del 1.8%. Calcular la probabilidad de que al elegir un Diskette este salga defectuoso.

Calcular la probabilidad de que al tener un Diskette defectuoso, el defecto sea del sector:

- a) Uno
- b) Dos
- c) Tres
- d) Cuatro

Ejercicios de teorema de Bayes

7. La fábrica de refrescos Pascual tiene dos máquinas para producir sus envases. En esa fábrica se producen 5 000 envases al día. La máquina I produce 3750 envases diarios de los cuales el 2% son defectuosos. La máquina II produce 1250 envases de los cuales el 3% son defectuosos. Se selecciona un envase al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el envase haya sido producido por la máquina I?
8. En el Palacio de Hierro el 25% de las compras son en efectivo, el 15% es pagado con cheque y el 60% es pagado a crédito. El 10% de las compras de las compras en efectivo, 80% de las compras con cheque y el 50% de las compras a crédito son mayores a \$5 000. Si en este momento se está realizando una compra por \$10 000, calcular la probabilidad de que la compra sea en efectivo.