El modelo de elección intertemporal

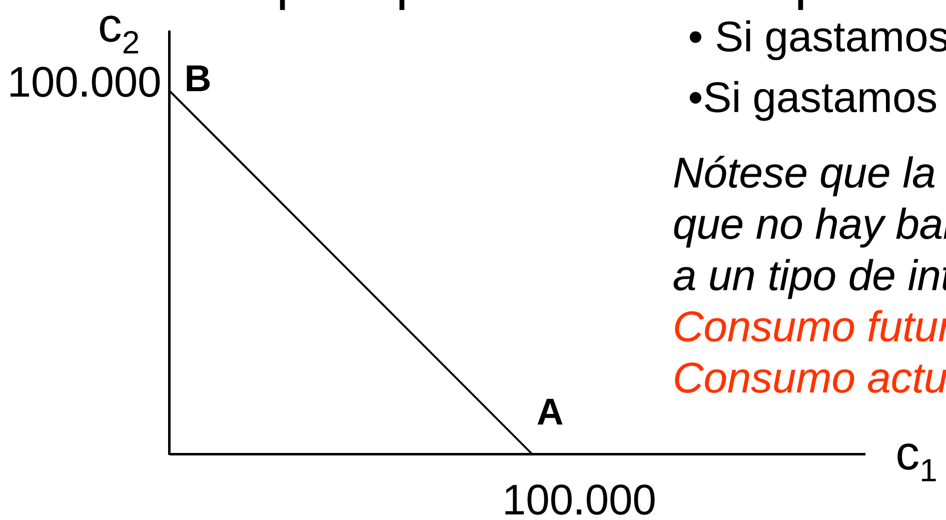
Análisis de Riesgo y Portafolios de Inversión

El modelo de elección intertemporal

1. Restricción presupuestaria intertemporal
2. Las preferencias intertemporales
3. La ecuación de Slutsky: efecto renta y efecto sustitución
4. La inflación
5. El valor actual neto
6. Los bonos

1. Restricción presupuestaria intertemporal

- 2 periodos: actual y futuro: consumo (c_1, c_2)
- Supongamos que dispone de una renta de 100.000 € en efectivo hoy, y que ésta es la única renta que tenemos para pagar tanto el consumo actual como el consumo futuro.
- Supongamos que no hay bancos donde podamos depositar el dinero a un tipo de interés, pero podemos almacenarlos sin costes y sin riesgos para el futuro.
- Restricción presupuestaria intertemporal:

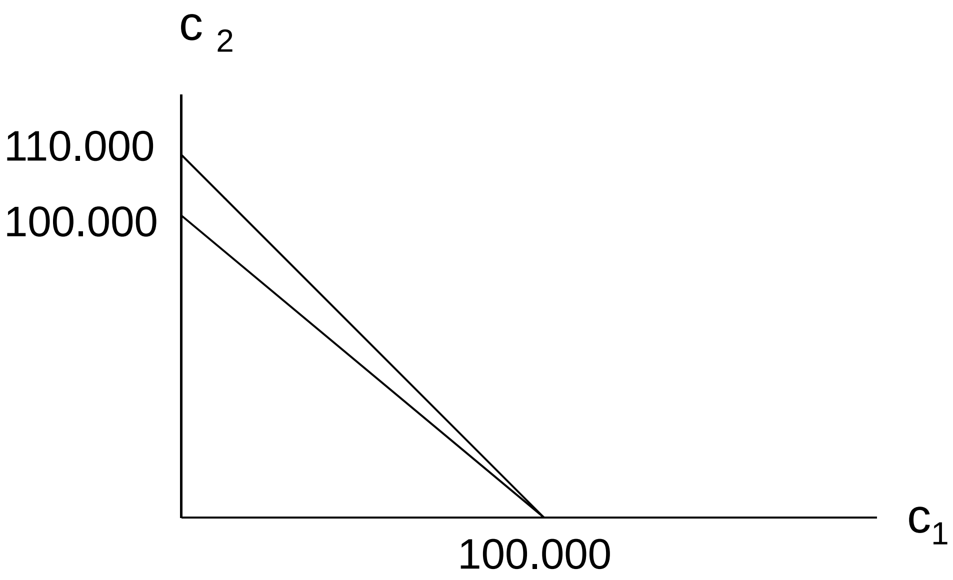


- Si gastamos toda la renta en consumo actual: **A**
- Si gastamos toda la renta en consumo futuro: **B**

Nótese que la pendiente es -1, ya que hemos supuesto que no hay bancos donde podamos depositar el dinero a un tipo de interés. $\Rightarrow$ *Para conseguir una unidad de Consumo futuro tenemos que renunciar a una unidad de Consumo actual*

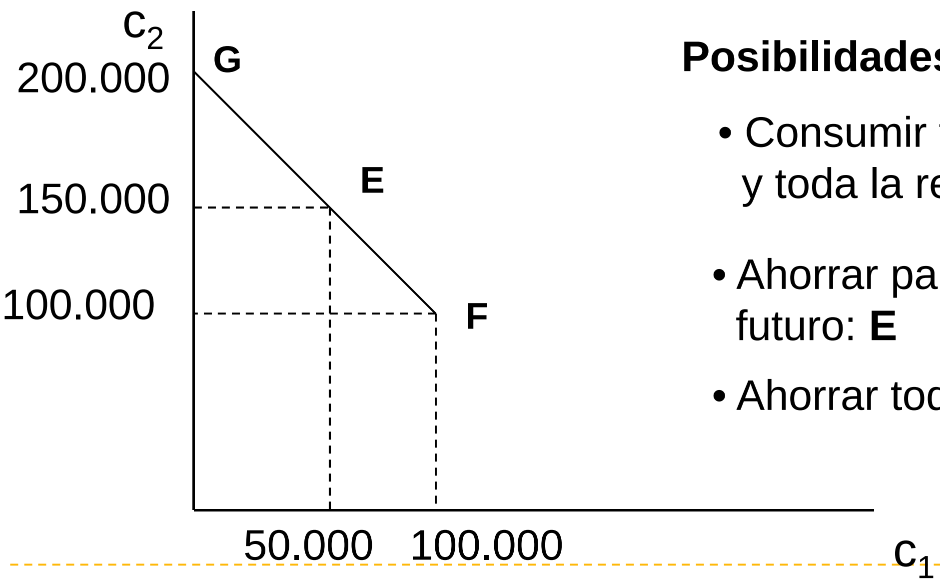
1. Restricción presupuestaria intertemporal (2)

- ¿Qué pasa si hay un banco que nos paga un tipo de interés del un 10% de aquí a un periodo futuro por los fondos que depositemos?
- Por cada € que depositemos en el periodo actual recibiremos 1.1 € en el periodo futuro.
- El coste de oportunidad de 1 unidad de consumo actual será 1.1 unidades de consumo futuro.



1. Restricción presupuestaria intertemporal (3)

- Hasta ahora hemos supuesto que toda la renta la recibimos en el periodo actual.
- Lo normal es que recibamos parte de la renta en el periodo actual y parte en el periodo futuro.
- Supongamos que recibimos 100.000 € en el periodo actual y 100.000 € en el periodo futuro, y que no hay bancos donde podamos depositar el dinero a un tipo de interés (*no podemos prestar ni pedir prestado*).



Posibilidades:

- Consumir toda la renta actual en el periodo actual y toda la renta futura en el futuro: **F**
- Ahorrar parte de la renta actual para el consumo futuro: **E**
- Ahorrar toda la renta actual para consumo futuro: **G**

1. Restricción presupuestaria intertemporal (4)

- Consideremos el caso general en que recibimos una renta M_1 en el periodo actual y una renta M_2 en el periodo futuro.
- Además podemos prestar y pedir prestado a un tipo de interés *r*.
- Cantidad máxima que podríamos consumir en el futuro (cuando gastamos toda la renta, actual y futura, en consumo futuro).

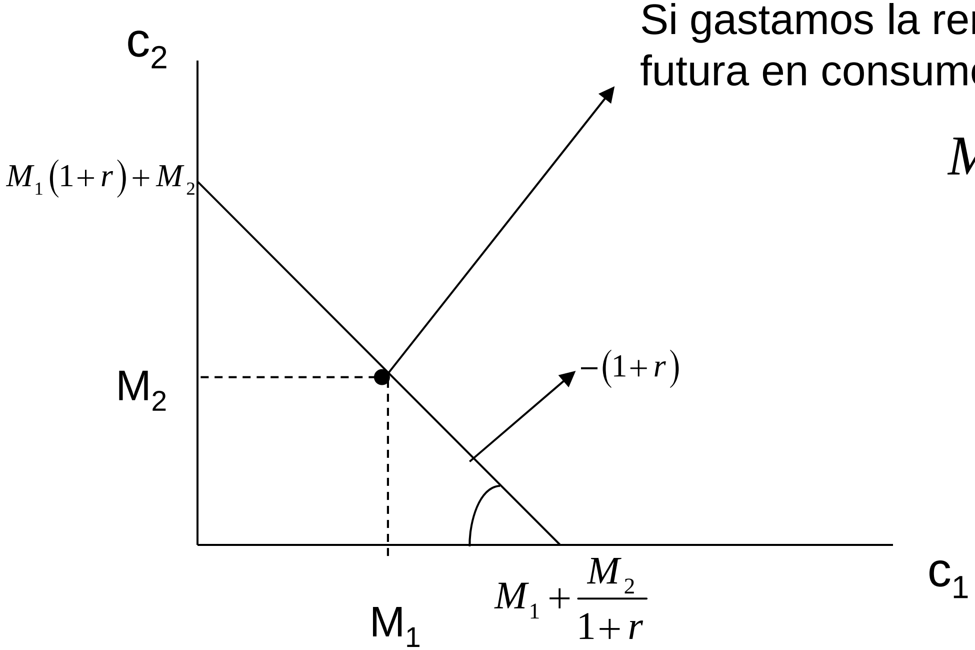
$$C_2^{\max} = M_2 + M_1(1+r)$$

- Cantidad máxima que podríamos consumir en el presente (cuando gastamos toda la renta, actual y futura, en consumo presente).

$$C_1^{\max} = M_1 + \frac{M_2}{(1+r)}$$

Valor actual de M_2

1. Restricción presupuestaria intertemporal (5)



Si gastamos la renta actual en consumo actual y la renta futura en consumo futuro

$$M_1(1+r)+M_2=C_1(1+r)+C_2$$

$$\boxed{C_2=M_1(1+r)+M_2-(1+r)C_1}$$

- La pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal puede interpretarse como un cociente entre el precio del consumo actual y el precio del consumo futuro.
- Como (1+r)>1, quiere decir que el consumo actual tiene un precio mayor que el consumo futuro.

1. Restricción presupuestaria intertemporal (6)

Valor futuro:

$$M_1(1+r)+M_2=C_1(1+r)+C_2$$

$$C_2=M_1(1+r)+M_2-(1+r)C_1$$

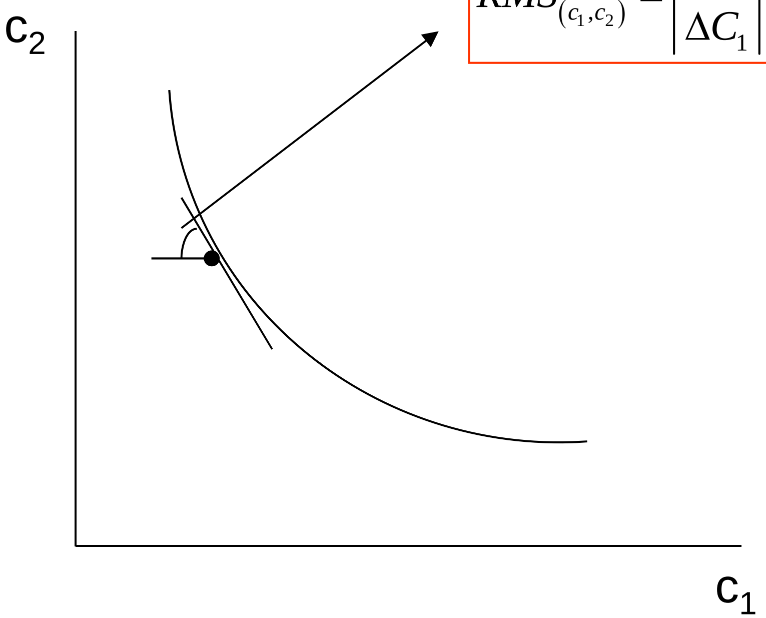
Valor actual:

$$M_1+\frac{M_2}{(1+r)}=C_1+\frac{C_2}{(1+r)}$$

$$C_2=M_1(1+r)+M_2-(1+r)C_1$$

2. Preferencias intertemporales

- Las preferencias de un consumidor respecto al consumo actual y consumo futuro también pueden representarse a través de curvas de indiferencia.



$$RMS_{(c_1, c_2)} = \left| \frac{\Delta C_2}{\Delta C_1} \right| \rightarrow \text{ Tasa marginal de preferencia intertemporal}$$

$$\rightarrow \text{Si } \left| \frac{\Delta C_2}{\Delta C_1} \right| > 1 \rightarrow \text{ Preferencia temporal positiva}$$

Se necesita **más** de una unidad de consumo futuro para compensar al individuo por la pérdida de una unidad de consumo actual.

$$\rightarrow \text{Si } \left| \frac{\Delta C_2}{\Delta C_1} \right| < 1 \rightarrow \text{ Preferencia temporal negativa}$$

Se necesita **menos** de una unidad de consumo futuro para compensar al individuo por la pérdida de una unidad de consumo actual

2. Preferencias intertemporales (2)

- **Demandas óptimas de consumo actual y futuro**

$$\max_{C_1,C_2} \; U(C_1,C_2)$$
$$s.a.\ (1+r)C_1 + C_2 = (1+r)M_1 + M_2$$

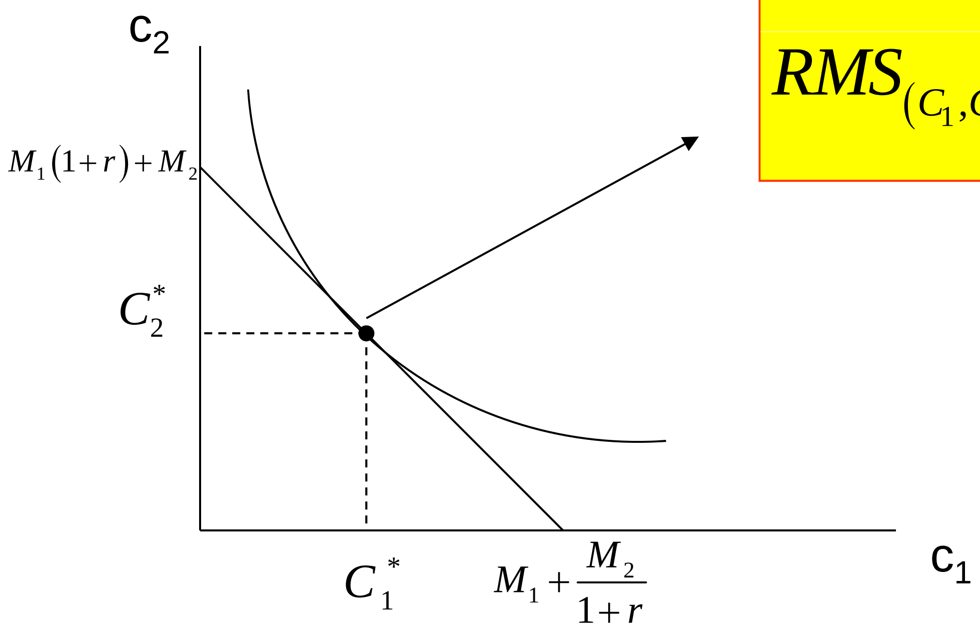
$$L = \quad U(C_1,C_2) + \lambda\{(1+r)M_1 + M_2 - (1+r)C_1 - C_2\}$$

$$\left.\begin{aligned} &1)\frac{\partial L}{\partial C_1} = 0 \Rightarrow UMg_{C_1} - \lambda(1+r) = 0 \\ &2)\frac{\partial L}{\partial C_2} = 0 \Rightarrow UMg_{C_2} - \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\frac{UMg_{C_1}}{UMg_{C2}} = (1+r) \Rightarrow RMS_{(C_1,C_2)} = (1+r)}$$

$$3)\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{(1+r)C_1 + C_2 = (1+r)M_1 + M_2}$$

2. Preferencias intertemporales (3)

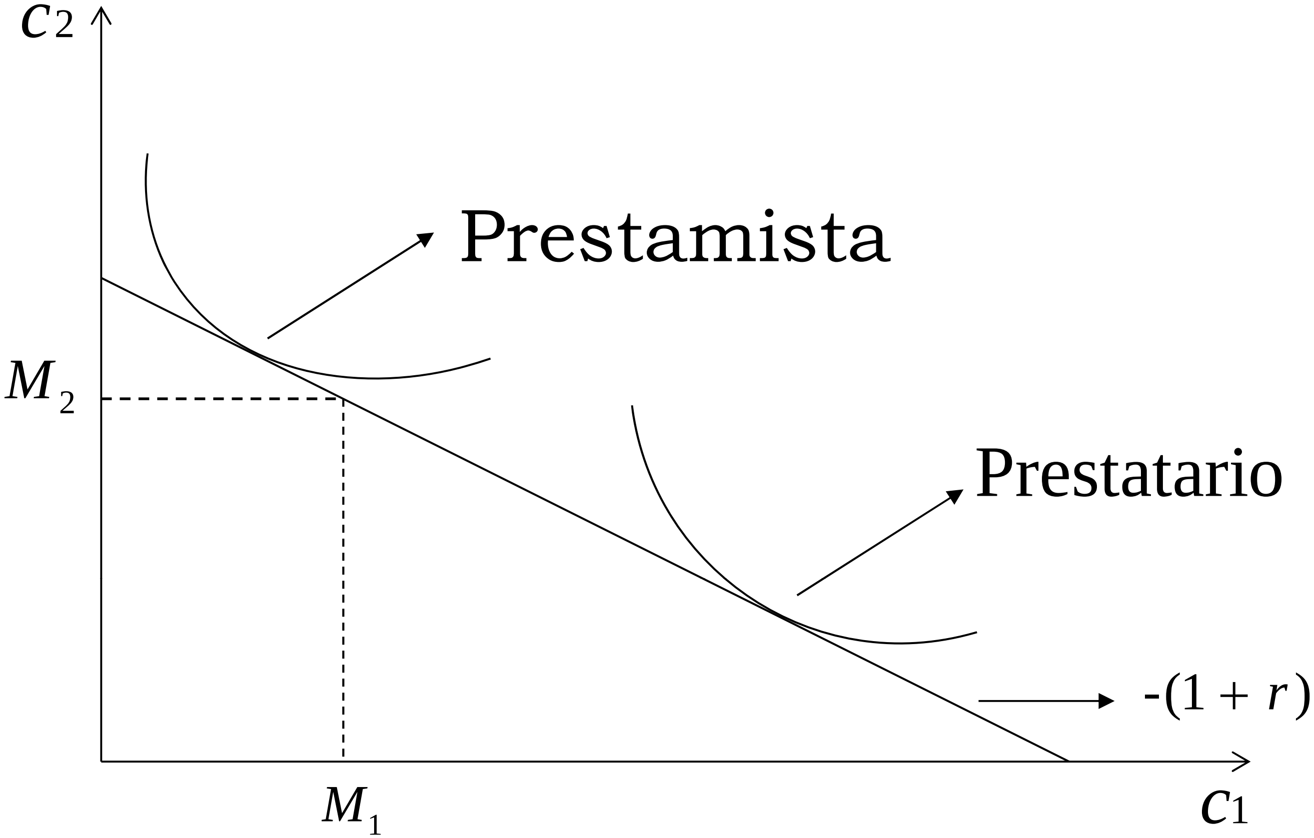
- **Demandas óptimas de consumo actual y futuro**



$$RMS_{(C_1,C_2)} = (1+r) = \frac{p_1}{p_2}$$

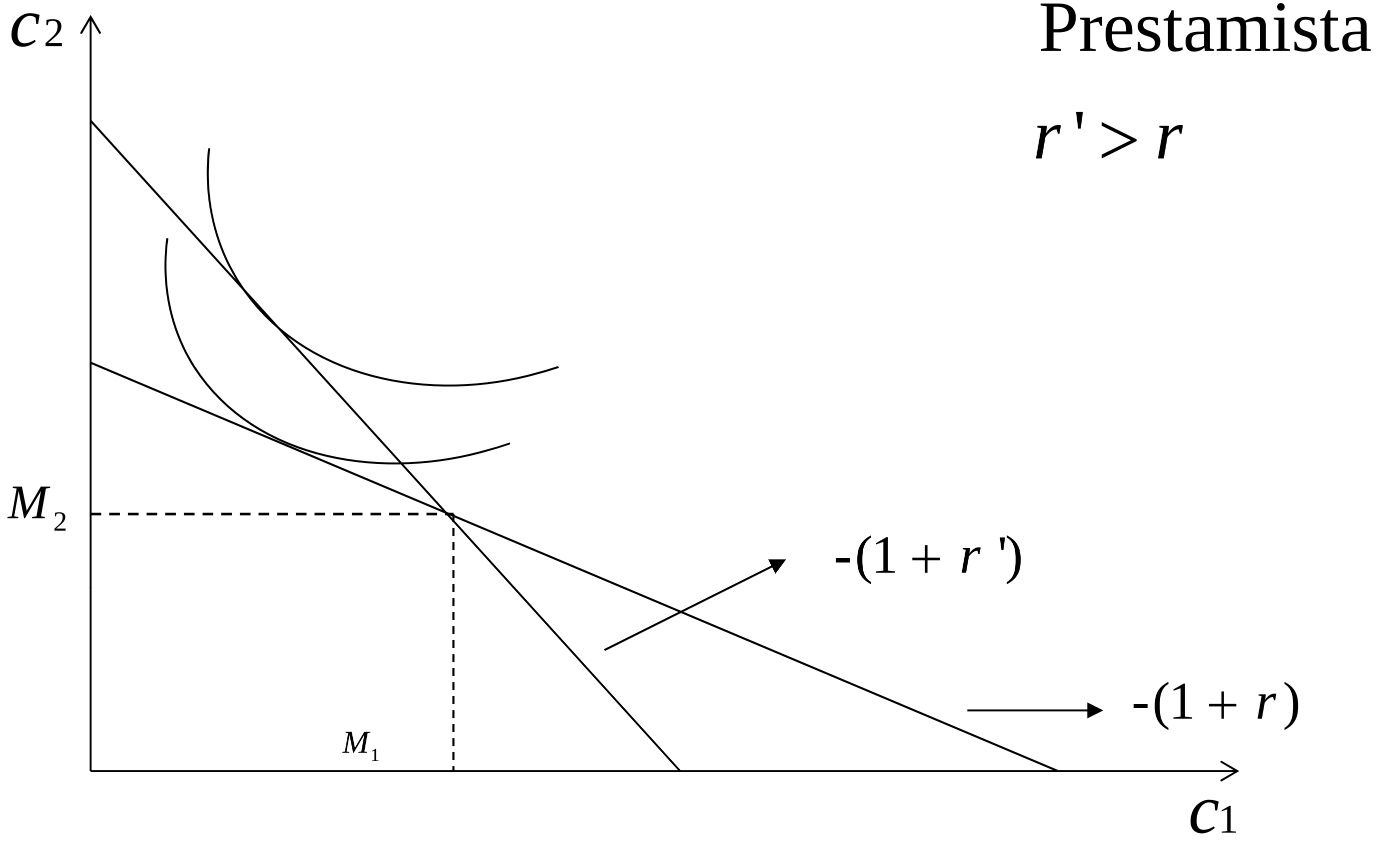
2. Preferencias intertemporales (4)

Las demandas óptimas de consumo actual y futuro pueden variar de unos individuos a otros



2. Preferencias intertemporales (5)

Cambios en el tipo de interés



- Si un individuo es inicialmente **prestamista** y sube el tipo de interés, seguirá siendo prestamista.
- Si un individuo es inicialmente **prestatario** y sube el tipo de interés, puede pasar a ser prestamista.

3. Efecto renta y efecto sustitución

- La **ecuación de Slutsky** puede utilizarse para descomponer la variación de la demanda provocada por un cambio del tipo de interés en efecto renta y efecto sustitución.
- El análisis es más sencillo cuando partimos de la restricción presupuestaria expresada en valor futuro.
- Una subida del tipo de interés es exactamente igual a una subida del precio del consumo actual en comparación con el consumo futuro.
- Según la ecuación de Slutsky tenemos:

$$\underbrace{\frac{\Delta C_1^t}{\Delta p_1}}_{\text{ET}} = \underbrace{\frac{\Delta C_1^s}{\Delta p_1}}_{\text{ES}} \underbrace{- C_1 \frac{\Delta C_1^m}{\Delta m}}_{\text{ER ordinario}} \underbrace{+ M_1 \frac{\Delta C_1^m}{\Delta m}}_{\text{ER dotación}}$$

3. Efecto renta y efecto sustitución (2)

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{\Delta C_1^t}{\Delta p_1} = \dfrac{\Delta C_1^s}{\Delta p_1} + \left(M_1 - C_1\right)\dfrac{\Delta C_1^m}{\Delta m} \\ (?) \qquad (\text{-}) \qquad (?) \qquad (+)\end{array}}$$

- El ES actúa como siempre en sentido opuesto al precio. Por tanto, si sube el tipo de interés, por el efecto sustitución se reduce el consumo en el periodo actual.

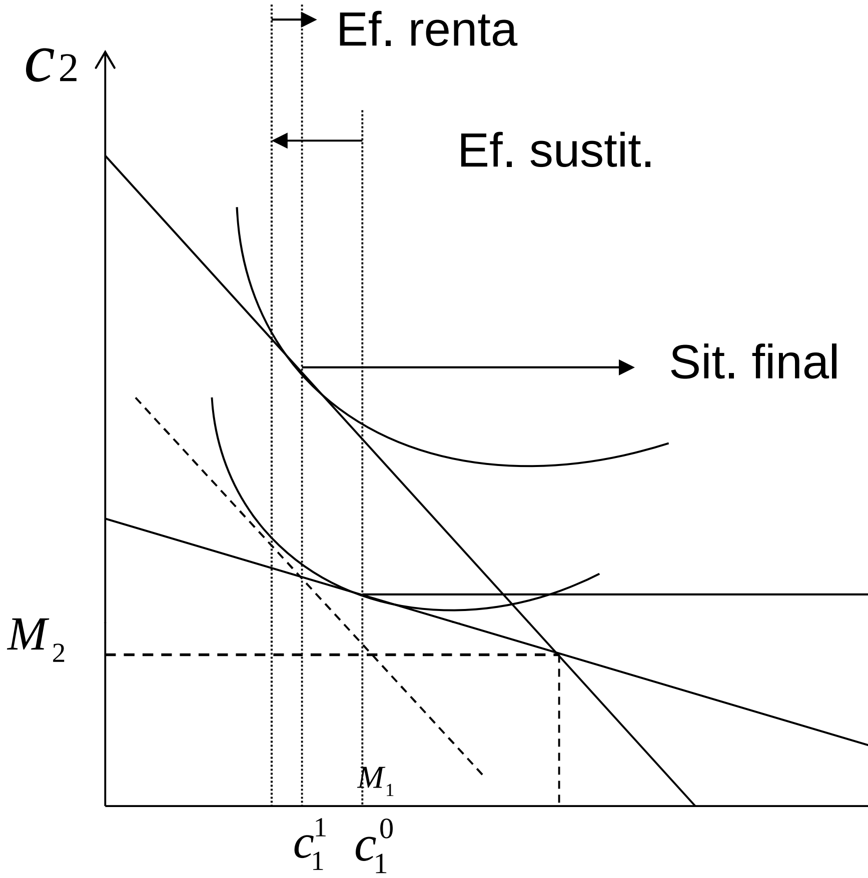
- Si el consumo actual es un bien normal, entonces variaciones en la renta y en el consumo actual van en el mismo sentido.
  - Si el individuo es **prestatario** $M_1 - C_1 < 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta C_1^t}{\Delta p_1} < 0$

Una subida del tipo de interés reduce el consumo actual

  - Si el individuo es **prestamista** $M_1 - C_1 > 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta C_1^t}{\Delta p_1} ?$

Una subida del tipo de interés tiene un efecto ambiguo sobre el consumo actual

3. Efecto renta y efecto sustitución (3)



- El individuo es inicialmente prestamista
- Sube el tipo de interés

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \dfrac{\Delta C_1^t}{\Delta p_1} = & \dfrac{\Delta C_1^s}{\Delta p_1} + & (M_1 - C_1) & \dfrac{\Delta C_1^m}{\Delta m} \\ (?) & (-) & (+) & (+) \end{array}}$$

ES domina a ER $\Rightarrow$ ET negativo

4. Inflación

- Hasta aquí el precio del bien es constante en los dos periodos.
- Ahora asumimos $p_1 = 1 \neq p_2$ y por lo tanto el consumo en el segundo periodo es,

$$p_2 c_2 = (m_1 - c_1)(1 + r) + p_2 m_2$$

- Si definimos la tasa de inflación π como $(1 + \pi) = p_2$

entonces, la restricción presupuestaria es

$$c_2 = (m_1 - c_1)\frac{1 + r}{1 + \pi} + p_2 m_2$$

4. Inflación (2)

- Si definimos el tipo de interés real como

Tdi real

$$1 + i = \frac{1 + r}{1 + \pi}$$

Tdi nominal

Tasa de inflación

- La restricción presupuestaria es

$$c_2 = (m_1 - c_1)(1 + i) + p_2 m_2$$

4. Inflación (3)

- ¿Porqué preferimos el dinero hoy a mañana?
  - Porque debido a la inflación pierde valor

$$(1+\pi)$$

  - Debido a la incertidumbre sobre el futuro

$$(1+i)$$

  - Y por lo tanto, $1+r=(1+i)(1+\pi)$

4. Inflación (4)

- Podemos simplificar la relación entre tipo de interés nominal, real y tasa de inflación.
- Para valores de r, i y π pequeños tenemos que

$$i = \frac{1+r}{1+\pi} - 1 = \frac{r-\pi}{1+\pi} \quad \Longrightarrow \quad r \approx i + \pi$$

5. Valor actual

- Hemos visto las expresiones de la restricción presupuestaria en valor presente y valor futuro.

Valor futuro

$$\boxed{M_1(1+i)+M_2=C_1(1+i)+C_2}$$

Valor presente

$$\boxed{M_1+\frac{M_2}{(1+i)}=C_1+\frac{C_2}{(1+i)}}$$

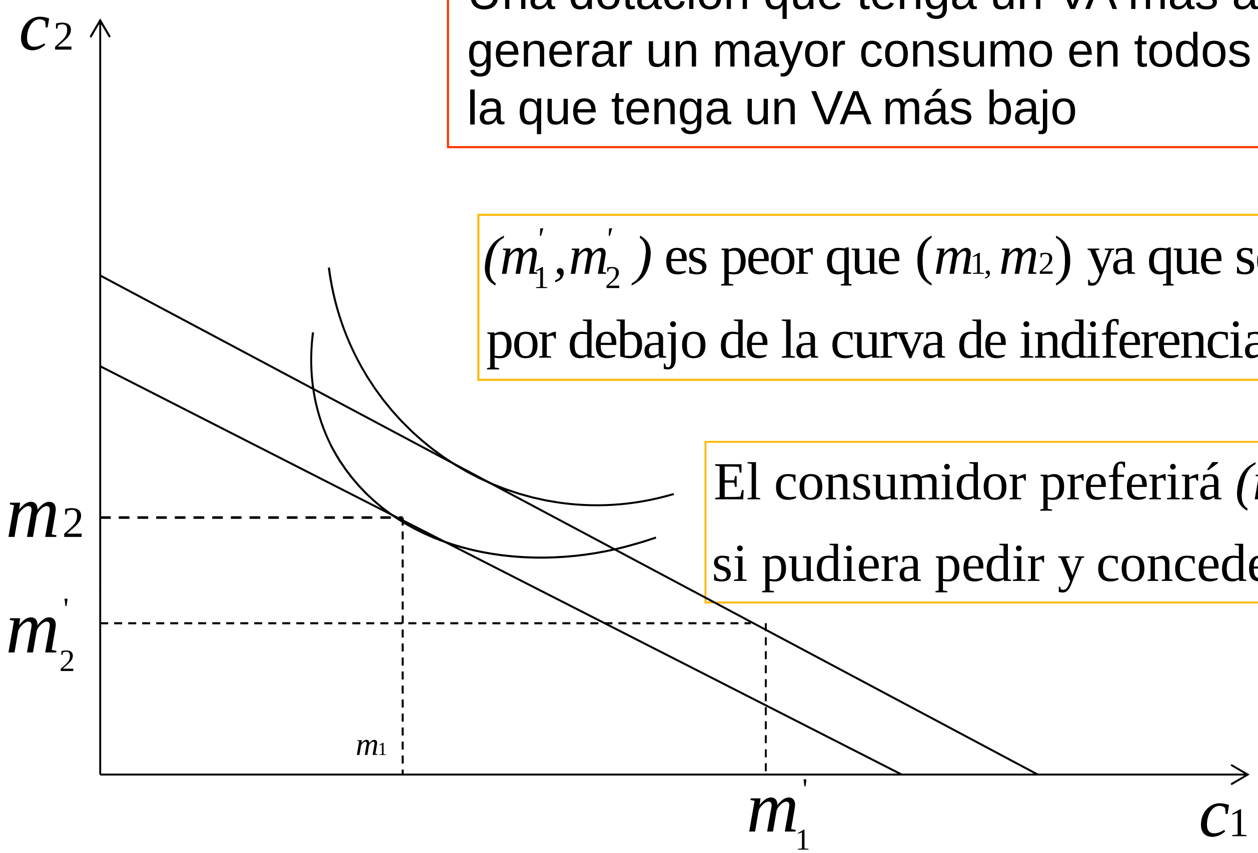
- **Valor futuro**: 1 € de hoy puede convertirse en (1+i) € en el próximo periodo, prestándolo al banco al tipo de interés i. **Valor presente**: ¿Cuánto vale 1€ del próximo periodo medido en € de hoy? → 1/(1+i)
- La restricción presupuestaria intertemporal nos indica que un plan de consumo es asequible si el valor actual del consumo es igual al valor actual de la renta.

5. Valor actual (2)

Una dotación que tenga un VA más alto siempre podrá generar un mayor consumo en todos los periodos que la que tenga un VA más bajo

(m_1', m_2') es peor que (m_1, m_2) ya que se encuentra por debajo de la curva de indiferencia de la dotación inicial

El consumidor preferirá (m_1', m_2') a (m_1, m_2) si pudiera pedir y conceder préstamos al tipo r



5. Valor actual (3)

El valor actual en el caso de varios periodos

- 1€ hoy son $(1+i)$ € dentro de un año.
- 1€ hoy son$(1+i)^2$ € dentro de dos años.
- La misma cantidad tiene valores distintos dependiendo de cuando está disponible.
- ¿Cómo podemos comparar dos series de flujos de dinero en el tiempo?
- El valor actual neto (VAN) nos ayuda a valorar una serie de flujos en el tiempo.

5. Valor actual (4)

- Supongamos que queremos valorar una serie de pagos (P_1, P_2, P_3) e ingresos (I_1, I_2, I_3) durante tres periodos.
- El VAN de esta serie de flujos será:

$$VAN = I_1 - P_1 + \frac{I_2 - P_2}{1+i} + \frac{I_3 - P_3}{(1+i)^2}$$

- Si hablamos de inversiones, una inversión será buena si su VAN>0 e implicará pérdidas si su VAN<0.

5. Valor actual (5)

Ejemplo

- Tenemos dos inversiones A y B durante dos periodos.
- A: +100€ +200€
- B: 0€ +310€
- Vamos a elegir cuál es mejor según el criterio del VAN.

5. Valor actual (6)

- Si $i = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} VAN_A = 300€ \\ VAN_B = 310€ \end{array}\right\} \text{ B es mejor}$$

- Si $i = 0{,}2$,

$$\left.\begin{array}{l} VAN_A = 100 + 200/1{,}2 = 266{,}67€ \\ VAN_B = 0 + 310/1{,}2 = 258{,}33€ \end{array}\right\} \text{ A es mejor}$$

5. Valor actual (7)

- El valor actual en el caso de varios periodos:

$$VAN = \sum_{t=0}^{T} \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

- Donde F_t representa los flujos netos de capital en cada uno de los periodos.

6. Los bonos

- Instrumentos financieros con determinadas estructuras de pagos.
- Se utilizan para financiar el consumo en uno u otro momento (fuentes de financiación).
- Numerosos tipos de instrumentos financieros: Letras del tesoro, Bonos de empresas.
- El **bono**: instrumento emitido por el Estado o por una sociedad anónima cuyo principal objeto es pedir prestado dinero.
  - El prestatario promete pagar una cantidad fija de dinero **x** (el cupón) en cada periodo hasta una fecha de vencimiento **T**.
  - En el momento T se pagará una cantidad **F** (valor nominal) al poseedor del bono.

6. Los bonos (2)

$$VA = \frac{X}{1+i} + \frac{X}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{F}{(1+i)^T}$$

- Caso especial: **Bonos a perpetuidad** (bono que promete pagar x € anuales indefinidamente.

$$VAN = \frac{X}{1+i} + \frac{X}{(1+i)^2} + \ldots$$

$$VAN = \frac{1}{1+i}\left[X + \frac{X}{1+i} + \frac{X}{(1+i)^2} + \ldots\right] \rightarrow VAN$$

$$\boxed{VAN = \frac{X}{i}}$$