Universidad Nacional Autónoma de México

Ciencia Económica

Órgano de difusión del Seminario Permanente de la Academia de Teoría Económica

Facultad de Economía

Año 3 • no. 5
julio-diciembre de 2014

Fecha de publicación:
15 de agosto de 2014

Materiales de apoyo a la Docencia

Rodríguez García, M., 2014. Cálculo de tendencia mediante la función e^t con t polinomial. *Ciencia Económica*, 3(5), julio-diciembre, pp. 43-53.

doi: 10.22201/fe.24484962e.2014.v3n5.a3

Revista electrónica *Ciencia Económica* **• Publicación semestral**

http://www.economia.unam.mx/cienciaeco/

Cálculo de tendencia mediante la función e^t con t polinomial*

Mauro Rodríguez García

Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
<kykloz@yahoo.com.mx>

doi: 10.22201/fe.24484962e.2014.v3n5.a3

PRESENTACIÓN

En la teoría de las series cronológicas se concibe al comportamiento de los fenómenos económicos, a lo largo del tiempo, regido por cuatro componentes, a saber: la tendencia, el ciclo económico, el ciclo estacional y las perturbaciones accidentales. El penúltimo de estos componentes puede conocerse cuando la información estadística disponible del fenómeno en cuestión se presenta con periodicidad menor al año. Si tal no es el caso, entonces sólo podrán conocerse los dos primeros componentes, pues, se asume, los dos últimos están *solidificados* en el dato anual. Sucintamente, lo anterior constituye la información que, sobre los componentes de fenómenos económicos, nos refieren los manuales de estadística de uso corriente.

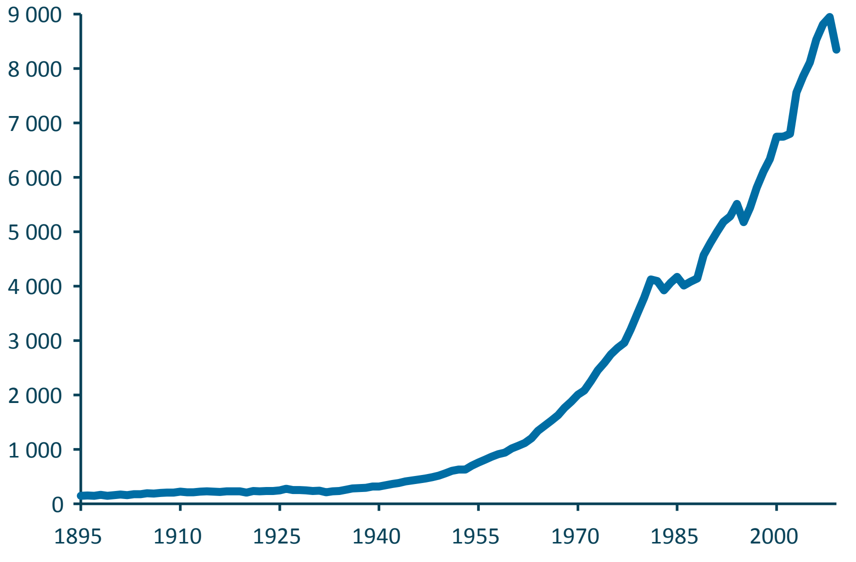
Por otra parte, cuando los aludidos manuales nos proporcionan las técnicas para aislar la tendencia y el ciclo económico, somos ilustrados con los métodos de medias móviles y de mínimos cuadrados. Para este último caso, se trata de aplicar a los datos originales una función de ajuste de tipo lineal, cuadrática, cúbica o exponencial; para este último caso, el exponente es una función lineal. Sin embargo, para necesidades específicas, estas herramientas pueden ser insuficientes.

En particular, macroagregados económicos con registro estadístico anual para largos periodos, requieren una línea de ajuste tendencial que rebasa los casos citados en el párrafo anterior. Tal sería el caso de la producción nacional, las exportaciones e importaciones, la producción

* Una versión del presente trabajo se presentó en el XI Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría, organizado en la Facultad de Economía de la UNAM, México, D.F, México, septiembre del 2001.

agrícola y manufacturera, entre otros. La gráfica 1 ilustra uno de esos casos; se trata de la evolución del producto interno bruto (PIB) de México, durante los años que van de 1895 al 2009, medido en millones de pesos a precios de 1980, serie formada a partir de información proporcionada por el Banco de México. Al tratarse de un conjunto de más de cien datos, y considerando que el citado ciclo económico acontece en lapsos temporales que van de los 8 a los 12 años, resulta evidente que un ajuste con ecuación lineal sería francamente inadecuado como tendencia.

PIB DE MÉXICO, 1895-2009
(miles de millones de pesos de 1980)



Con el presente material nos proponemos ilustrar la generalización del método de mínimos cuadrados para calcular la tendencia del comportamiento de fenómenos económicos como los arriba citados. La generalización en cuestión proviene del proceso de formación de las ecuaciones normales, que constituyen la base para el cálculo de la tendencia cuando se utiliza una función de ajuste exponencial y, en el exponente de ésta, se tiene un polinomio. El motivo que nos guía es, simplemente, divulgar la citada generalización del método pues si bien los textos no lo desarrollan, si nos proporcionan sus bases para hacerlo, según veremos enseguida.

FUNCIONES DE AJUSTE DE TENDENCIA

Cuando deseamos calcular una tendencia de tipo lineal, digamos:

$$Y_c = a + bX$$

donde Y_c representa a los datos estimados de la variable, las literales ***a*** y ***b*** denotan los parámetros a estimar de la ecuación de tendencia, mientras que utilizamos la variable ***X*** para representar al tiempo.

La teoría de series de tiempo indica que, para calcular el valor de los parámetros ***a*** y ***b***, requerimos del siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$na + b\Sigma X = \Sigma Y$$

$$a\Sigma X + \mathrm{b}\Sigma X^2 = \Sigma XY$$

Expresiones en las cuales la literal ***n*** representa a la cantidad de datos que constituyen la serie objeto de análisis; ***Y*** es la variable de la que nos interesa calcular su tendencia, cuya magnitud en cada año habremos de agregar y, según sea el caso, afectarla a la potencia indicada. El valor de ***X*** lo asignamos, con números progresivos que representan una unidad del tiempo, magnitud que también deberemos agregar para el periodo. Como puede advertirse, también deberemos calcular el producto ***XY***, y sumarlo para el lapso bajo estudio.

A partir del sistema de ecuaciones normales, el valor de la incógnita ***b*** equivale a:

$$b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

Por su parte, el valor del coeficiente ***a*** lo obtenemos al sustituir el anterior valor de ***b*** en cualquiera de las ecuaciones normales.

Así, la curva de tendencia $Y_c = a + bX$ se forma al aplicar, para cada año de la serie, el valor de los parámetros.

El procedimiento anterior se reitera para el caso en que los datos acepten una función parabólica de ajuste, es decir, cuando ésta sea:

$$Y_c = a + bX + cX^2$$

Sólo que para este caso habremos de calcular los tres parámetros ***a***, ***b*** y ***c***, lo que requiere ahora del siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$an + b\Sigma X + c\Sigma X^2 = \Sigma Y$$

$$a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 = \Sigma XY$$

$$a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 = \Sigma X^2Y$$

De manera análoga, si nuestra serie de datos requiere ajustarse, para la generación de su curva de tendencia, con una función cúbica, esta sería:

$$Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$$

en la cual figuran ahora cuatro incógnitas, cuyo valor puede conocerse a partir del sistema de ecuaciones normales que aparece enseguida:

$$an + b\Sigma X + c\Sigma X^2 + d\Sigma X^3 = \Sigma Y$$

$$a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 + d\Sigma X^4 = \Sigma XY$$

$$a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 + d\Sigma X^5 = \Sigma X^2Y$$

$$a\Sigma X^3 + b\Sigma X^4 + c\Sigma X^5 + d\Sigma X^6 = \Sigma X^3Y$$

A partir de lo anterior, se advierte que conforme aumenta el grado de la ecuación de ajuste para la generación de la curva de tendencia, mayor será el número de parámetros a estimar y, desde luego, mayor el número de ecuaciones normales necesario para ello. Por lo tanto, se torna más laborioso el cálculo de la expresión equivalente de los citados parámetros de la ecuación de ajuste. Puede agilizarse el cálculo de estos últimos, lo que podemos deducir a partir de una inspección a los sistemas de ecuaciones normales que arriba hemos presentado.

- En primer lugar, nótese que cada ecuación normal contiene todos los parámetros a estimar, cada uno como parte integrante de un término algebraico.
- Adviértase que conforme aumenta el grado de la ecuación de ajuste, aumenta el número de parámetros a calcularse, siendo éstos las incógnitas de las ecuaciones normales.
- La cantidad de ecuaciones normales que se requiere equivale al número de parámetros a estimar, cantidad que equivale, asimismo, a la unidad más el grado de la ecuación de ajuste.
- El miembro izquierdo de cada ecuación normal está compuesto por términos que contienen a la variable X, afectada por exponentes cuyo valor aumenta término a término, desde cero (puede deducirse que an equivale a aX^0n).
- El primer término del miembro izquierdo de cada ecuación normal contiene a la incógnita X afectada con un exponente cuyo grado es una

unidad mayor respecto a la ecuación normal anterior. Lo propio ocurre con los siguientes términos de dicho miembro.

- El grado mayor en las ecuaciones normales es el duplo del grado de la ecuación de ajuste que se busca formar.
- El miembro derecho de las ecuaciones normales está compuesto por la sumatoria del producto de la variable objeto de análisis y la variable que denota el tiempo; al pasar subsecuentemente de una ecuación normal a otra, aumenta en una unidad la magnitud del exponente que afecta a la variable X (puede deducirse que, en la primera ecuación normal, ΣY equivale a $\Sigma X^0 Y$).

Antes de continuar, incorporemos el caso del ajuste de los datos con una función exponencial. Sea el caso de la función:

$$Y_c = e^t$$

donde e representa, en particular, el fenómeno de crecimiento, y t un número, mismo que puede ser, desde luego, una ecuación lineal o de grado mayor; t, por tanto, es un polinomio. Ahora bien, cuando en los manuales se ilustra el uso de la expresión e^t, o alguna equivalente, para ajustar una serie de datos, generalmente se recurre al caso en que t sea un número natural o, a lo más, una ecuación lineal, es decir:

$$Y_c = e^{a+bX}$$

El propósito de las presentes líneas consiste en mostrar cómo puede utilizarse una función como la anterior para generar la curva de tendencia de una serie de datos, cuyo comportamiento exija que el exponente de e sea un polinomio de grado mayor a la unidad. Esto es, si $t = a + bX + cX^2 + dX^3 + fX^4 + \ldots$, entonces:

$$Y_c = e^{a+bX+cX^2+dX^3+fX^4+\ldots}$$

Por comodidad, la expresión anterior puede transformarse a su expresión en logaritmos naturales, la cual resulta (si recordamos que el logaritmo de e es la unidad) en:

$$\ln Y_c = \ln a + (\ln b)X + (\ln c)X^2 + (\ln d)X^3 + (\ln f)X^4 + \ldots$$

Podemos notar que la estructura de esta ecuación es enteramente análoga a las que anteriormente ilustramos, es decir, se trata de un polinomio en la variable X, que se distingue únicamente en que los coeficientes y el valor de Y_c a calcular aparecen en valores logarítmicos. Por lo tanto, la estructura del sistema de ecuaciones normales será también análoga a la que presentamos párrafos arriba.

Recordemos que, para especificar la anterior ecuación de ajuste a nuestra serie de datos, nuestro problema principal consiste en determinar los valores de los coeficientes en X del lado derecho de la ecuación. Este problema lo abordamos en la siguiente sección.

ECUACIONES NORMALES Y COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN DE AJUSTE

Para utilizar una ecuación de ajuste como la presentada al final de la sección anterior, lo primero que deberemos hacer es transformar los valores de nuestra serie histórica a su equivalencia en logaritmos naturales. Posteriormente, se debe asignar una magnitud progresiva a la variable tiempo y calcular las potencias de la misma en un número de grados que será el duplo que el respectivo grado de la ecuación de ajuste, según observamos anteriormente. También habrá de calcularse el producto de los logaritmos de la variable original con la variable tiempo, y ésta (afectada por exponentes también crecientes) conforme requiere la citada ecuación de ajuste. Por último, si recordamos, las ecuaciones normales se formarán por las sumatorias de las variables antes descritas, afectadas por su respectivo parámetro. Ilustremos simbólicamente lo anterior.

Por ejemplo, si requerimos ajustar una serie de datos con una ecuación de cuarto grado:

$$\ln Y_c = \ln a + (\ln b)X + (\ln \mathrm{c})X^2 + (\ln d)X^3 + (\ln e)X^4$$

entonces el sistema de ecuaciones normales será el siguiente:

$$\begin{aligned}
\ln an + \ln b\Sigma \mathrm{X} + \ln c\Sigma X^2 + \ln d\Sigma X^3 + \ln e\Sigma X^4 &= \Sigma \ln Y \\
\ln a\Sigma X + \ln b\Sigma X^2 + \ln c\Sigma X^3 + \ln d\Sigma X^4 + \ln e\Sigma X^5 &= \Sigma(X \ln Y) \\
\ln a\Sigma X^2 + \ln b\Sigma X^3 + \ln c\Sigma X^4 + \ln d\Sigma X^5 + \ln e\Sigma X^6 &= \Sigma(X^2 \ln Y) \\
\ln a\Sigma X^3 + \ln b\Sigma X^4 + \ln c\Sigma X^5 + \ln d\Sigma X^6 + \ln e\Sigma X^7 &= \Sigma(X^3 \ln Y) \\
\ln a\Sigma X^4 + \ln b\Sigma X^5 + \ln c\Sigma X^6 + \ln d\Sigma X^7 + \ln e\Sigma X^8 &= \Sigma(X^4 \ln Y)
\end{aligned}$$

El cálculo de los parámetros ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** y ***e***, presentes en el sistema ecuacional anterior, se facilita si transformamos este último en otro compuesto por tres matrices. Una primera matriz, que llamaremos ***A***, estará formada por las sumatorias del valor de ***X*** afectado por sus diversos exponentes. Conforme a nuestro ejemplo, se trata, por tanto, de una matriz cuadrada de 5×5, misma que adquiere la siguiente forma (por comodidad de visualización, en lo que sigue omitimos la notación de logaritmo natural, así como el símbolo de sumatoria (entenderemos, por tanto, que se trata de los valores agregados):

$$\begin{bmatrix} n & X & X^2 & X^3 & X^4 \\ X & X^2 & X^3 & X^4 & X^5 \\ X^2 & X^3 & X^4 & X^5 & X^6 \\ X^3 & X^4 & X^5 & X^6 & X^7 \\ X^4 & X^5 & X^6 & X^7 & X^8 \end{bmatrix} = A$$

Asimismo, los miembros derechos de las ecuaciones normales pueden llevarse a la forma de una matriz columna, a la cual denominaremos ***B***, misma que adquirirá la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} X \\ XY \\ X^2Y \\ X^3Y \\ X^4Y \end{bmatrix} = B$$

Por último, con nuestras incógnitas formaremos también una matriz con una columna, a la que denotaremos con el símbolo λ, como se exhibe enseguida:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \lambda$$

Así, el sistema de ecuaciones normales, expresado en su forma matricial, manifiesta la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} n & X & X^2 & X^3 & X^4 \\ X & X^2 & X^3 & X^4 & X^5 \\ X^2 & X^3 & X^4 & X^5 & X^6 \\ X^3 & X^4 & X^5 & X^6 & X^7 \\ X^4 & X^5 & X^6 & X^7 & X^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ XY \\ X^2Y \\ X^3Y \\ X^4Y \end{bmatrix}$$

En su forma sintética, tenemos que $A\lambda = B$, donde λ es la incógnita que deseamos conocer, pues contiene los parámetros de nuestra ecuación de suavizamiento (o alisamiento, como algunos dirían). Para despejar aquella incógnita, simplemente necesitamos multiplicar ambos miembros de la ecuación por la matriz inversa de A, puesto que $A(A^{-1})$ resulta en la matriz identidad. En resumen:

$$A\lambda = B$$

$$A^{-1}A\lambda = A^{-1}B$$

$$I\lambda = A^{-1}B$$

$$\lambda = A^{-1}B$$

Por ende, cada elemento de λ nos proporciona uno de los coeficientes de la ecuación de normalización o alisamiento de nuestra serie de datos original, es decir, al realizar aquella operación matricial obtenemos los valores de los parámetros ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** y ***e***, que figuran en la ecuación:

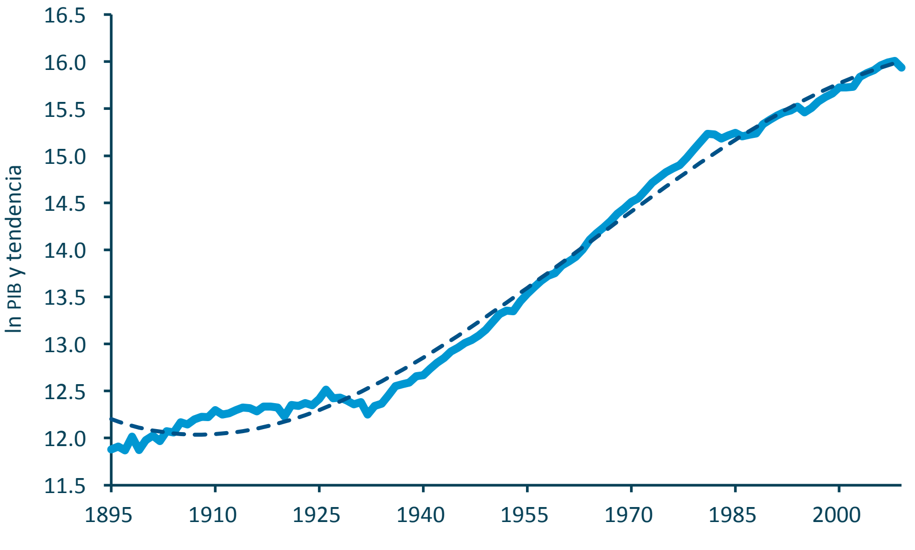
$$\ln Y_c = \ln a + (\ln b)X + (\ln c)X^2 + (\ln d)X^3 + (\ln e)X^4$$

Como es obvio, los valores de los parámetros deben sustituirse en la expresión anterior, donde también sustituimos los valores que en nuestro procedimiento hemos asignado a X (en sus diferentes potencias), para cada uno de los momentos de (la serie de) tiempo. Nuestro resultado, desde luego, es la formación o identificación de los puntos que forman la línea de normalización, de suavizamiento o línea de tendencia asociada con los datos originales de nuestra serie, como se ilustra en la siguiente sección.

DOS ILUSTRACIONES

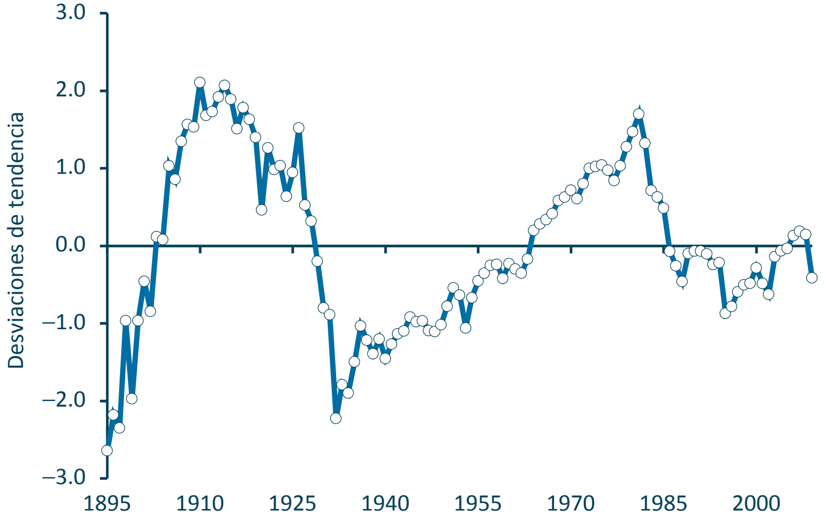
Aplicamos el procedimiento descrito en la sección anterior a la serie del producto nacional referida *supra* (y cuya gráfica mostramos al inicio del presente documento), buscando la mejor línea de suavizamiento exponencial, para lo cual ensayamos con funciones e^t, donde t constituyó un polinomio desde primero y hasta doceavo grado, conforme fue descrito anteriormente. Resultado de esos ensayos fueron particularmente útiles los exponentes polinomiales de tercer y noveno grado, pues al eliminarse la línea de tendencia así generada permitieron apreciar la existencia de los llamados ciclos largos de la economía, así como de los ciclos económicos propiamente dichos. La gráfica siguiente muestra las curvas de los logaritmos del PIB y de la tendencia obtenida con la función exponencial con exponente cúbico.

TENDENCIA EXPONENCIAL (3er GRADO)
PIB DE MÉXICO, 1895-2009



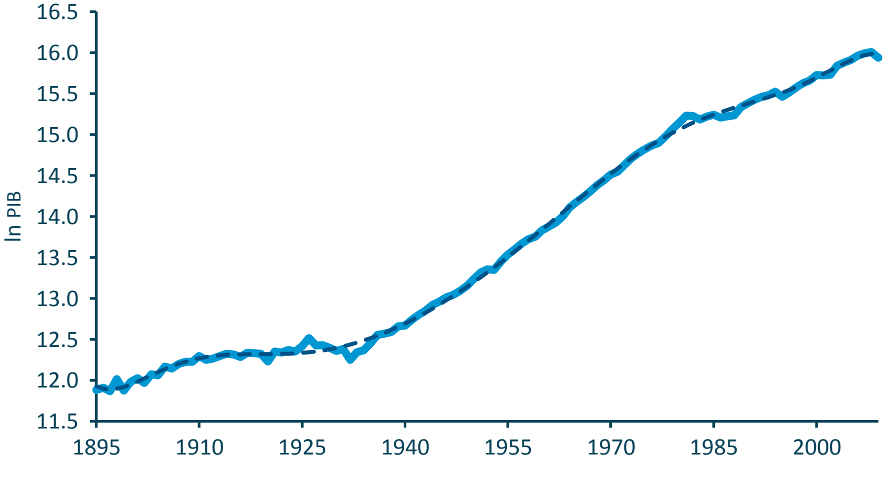
De manera general, el propósito de normalizar o suavizar una serie de datos, como la antes generada, es poder separar la tendencia de la variable originaria para así conseguir apreciar sus fluctuaciones. En el ejemplo que nos ocupa, tales oscilaciones exhiben el fenómeno económico conocido como grandes ciclos o ciclos de Kondrátiev, de duración promedio de 45 a 60 años, y cuya trayectoria se aprecia en la siguiente gráfica.

CICLOS LARGOS EN MÉXICO, 1895-2009
(porcentajes)



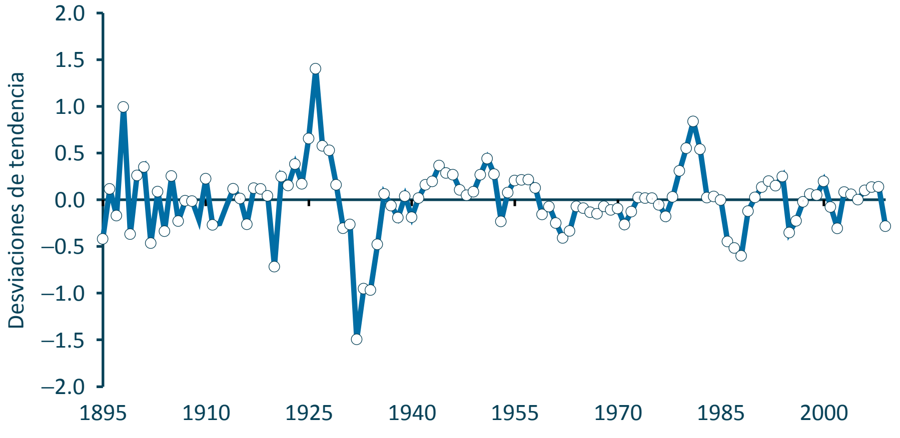
Si pasamos ahora a la segunda curva de normalización comentada líneas arriba, es decir, a la obtenida con una ecuación de ajuste de noveno grado, y la ponemos en contraste con la de la serie de datos originales, obtenemos la siguiente gráfica.

AJUSTE EXPONENCIAL (9° GRADO)
PIB DE MÉXICO, 1895-2009



Amén de las sugestivas inquietudes que puede provocarnos la inspección de la gráfica anterior, comentemos algo análogo a lo que realizamos con la función de ajuste de tercer grado: en el caso de la función de ajuste de noveno grado, al eliminar la tendencia de la serie de datos original mediante el procedimiento de hacer $(Y_c/T) = C$, donde C es el ciclo económico, este último fenómeno queda representado en nuestra gráfica siguiente.

CICLOS MEDIOS EN MÉXICO, 1895-2009
(porcentajes)



El presente trabajo tuvo el propósito de ilustrar la generalización de una técnica para el cálculo de tendencias en series cronológicas, para con ello estar en posibilidad de aislar el ciclo económico. Puede accederse a las temáticas más amplias, del lado de la técnica, de la teoría de las fluctuaciones o del análisis empírico mediante la consulta de materiales como los que se ofrecen en la bibliografía.

BIBLIOGRAFÍA

Chao, L.L., 1993. *Estadística para las ciencias administrativas*. 3ª edición. Santa Fe de Bogotá: McGraw-Hill.

Padilla Aragón, E., 1967. *Ciclos económicos y política de estabilización*. México: Siglo XXI Editores.

Rodríguez García, M., 2001. *Las fluctuaciones económicas en México, 1878-1996*. México: Facultad de Economía, UNAM.

Shao, S.P., 1980. *Estadística para economistas y administradores de empresas*. México: Herrero.