



Revista Ciencia Económica

Órgano de difusión del Seminario Permanente de la Academia de Teoría Económica

UNAM

José Narro Robles
Rector

Eduardo Bárzana García
Secretario General

Leopoldo Silva Gutiérrez
Secretario Administrativo

Javier de la Fuente Hernández
Secretaria de Desarrollo Institucional

Ramiro Jesús Sandoval
Secretario de Servicios
a la Comunidad Universitaria

Luis Raúl González Pérez
Abogado General

FACULTAD DE ECONOMÍA

Leonardo Lomelí Vanegas
Director

Eduardo Vega López
Secretario General

Javier Urbieto Zavala
Secretario Administrativo

CIENCIA ECONÓMICA

Mauro Rodríguez García
Director

Andrés Blancas Neria
(Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM)

Jorge Carreto Sanguinés
(Facultad de Economía, UNAM)

Irma Escarcega Aguirre
(Facultad de Economía, UNAM)

Carlos Guerrero de Lizardi
(Tecnológico de Monterrey, Campus Cd. México)

Rogelio Huerta Quintanilla
(Facultad de Economía, UNAM)

Carlos Ibarra Niño
(Universidad de las Américas, Puebla)

Javier Martínez Peinado
(Universidad de Barcelona)

Carlos Maya Ambía
(Universidad de Guadalajara)

Comité Editorial

Karina Navarrete Pérez
Secretaria Técnica
Diseño y formación editorial

Jorge Carreto Sanguinés
Irma Escarcega Aguirre
Rogelio Huerta Quintanilla
Mauro Rodríguez García
Paulo Scheinvar Akcelrad†
Fundadores



Facultad de Economía

1 de enero de 2013
año 2 • no. 2

Rendón de la Torre, S., 2013.
Memoria de largo plazo en el
índice S&P500: un enfoque
fractal aplicando el coeficiente de
Hurst con el método R/S (rango
escalado). *Ciencia Económica*,
2(2), pp. 35-61.

doi: 10.22201/fe.24484962e.2013.v2n2.a3

Revista Ciencia Económica • Publicación semestral

<http://www.economia.unam.mx/cienciaeco/>

Memoria de largo plazo en el índice S&P500: un enfoque fractal aplicando el coeficiente de Hurst con el método R/S (rango escalado)*

Stephanie Rendón
de la Torre

Facultad de Contaduría y Administración, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
<rendon@amadvisors.com.mx

doi: 10.22201/fe.24484962e.2013.v2n2.a3

RESUMEN

El coeficiente de Hurst tiene diversas aplicaciones, siendo una de ellas el pronosticar las tendencias en mercados financieros. Este trabajo versa sobre el análisis del coeficiente de Hurst obtenido mediante la metodología R/S (rango escalado) con la finalidad de evaluar las características no lineales, fractales y de comportamiento persistente (si lo hay), evaluar los efectos de ruido blanco, determinar si es posible pronosticar tendencias con la ayuda de este tipo de análisis, delinear las posibilidades que existen para el estudio del análisis fractal, así como encontrar las alternativas a seguir. Finalmente, se busca proponer una alternativa viable de investigación que sea más concordante con la crítica al comportamiento aleatorio de precios y rendimientos, reconociendo que la distribución gaussiana debe ser sustituida por alguna de la familia de distribuciones estables de Pareto (distribuciones leptocúrticas y colas gordas), y es precisamente la naturaleza fractal de las cosas la que obliga a replantear este sendero como una alternativa de investigación.

Palabras clave: coeficiente de Hurst, método R/S, ruido blanco, memoria de largo plazo, fractal.

Clasificación JEL: C58, G14, C02, C46.

LONG-TERM MEMORY IN THE S&P500 INDEX: A FRACTAL APPROACH APPLYING THE HURST COEFFICIENT WITH THE R/S METHOD (RESCALED RANGE)

Abstract

The Hurst coefficient has several usages; one of them is to forecast trends in financial markets. This research work estimates the Hurst coefficient

* La presente investigación se presentó como ponencia en el XVII Congreso Internacional de Contaduría, Administración e Informática, que tuvo sede en el Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración de la UNAM, a finales de 2012.

obtained by R/S methodology (Rescaled Range analysis) in order to evaluate nonlinear characteristics, fractal and persistent behavior (if any), to assess the effects of white noise, whether it is possible to predict trends with help of this kind of analysis, to outline the possibilities for further studies of fractal analysis, and to find alternatives to continue research work with the proposed approach. Finally, this investigation pursues to propose a viable alternative for research which is more consistent with the criticism of the random behavior of prices and yields, recognizing that the Gaussian distribution should be replaced by any family of stable distributions of Pareto (leptokurtic distributions and fat tails), and it is the fractal nature of things that forces us to rethink this path as an alternative research.

Key words: coefficient of Hurst, R/S method, white noise, long-term memory, fractal.

INTRODUCCIÓN

Una aplicación poco explorada del coeficiente de Hurst es el pronóstico de tendencias en mercados financieros. Este trabajo versa sobre el análisis del coeficiente de Hurst obtenido mediante la metodología R/S (rango escalado) aplicada al índice S&P500 utilizando series de datos de precios diarios publicados de la base de datos de Bloomberg para los años de 1928-2012 con la finalidad de evaluar las características no lineales, fractales y de comportamiento persistente (si lo hay), evaluar los efectos del ruido blanco, determinar si es posible pronosticar tendencias con la ayuda de este tipo de análisis, delinear las posibilidades que existen para el estudio del análisis fractal en finanzas, así como encontrar las alternativas a seguir en este planteamiento de investigación. Finalmente, se busca proponer una alternativa viable de investigación que sea más concordante con la crítica al comportamiento aleatorio de precios y rendimientos, reconociendo que la distribución gaussiana debe ser sustituida por alguna de la familia de distribuciones estables de Pareto (distribuciones leptocúrticas y colas gordas), y es precisamente la naturaleza fractal de las cosas la que obliga a replantear este sendero como una alternativa de investigación y a continuar la búsqueda en la experimentación y modelización que verdaderamente se apegue a los hechos reales y no únicamente a las teorías.

Toda belleza es relativa [...] No hemos de [...] creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas hayan perdido la forma porque no son exactamente como pirámides o conos; ni que las estrellas estén situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme. Estas irregularidades no son naturales, sino sólo porque lo que respecta a nuestros gustos; ni resultan incómodas para los verdaderos usos de la vida y de los designios de la vida del hombre en la tierra [...]. Mandelbrot (1970: 22) cita a Richard Bentley sabio inglés del siglo XVII.

¿Por qué ninguna de las figuras geométricas que presenta la naturaleza se describe por las figuras que conocemos? Cuadrado, rombo, círculo, triángulo, etcétera. Una montaña, un árbol, una hoja de una planta, la forma de un rayo, una nube. Es imposible describir o medir la forma exacta de la naturaleza con la geometría euclidiana. La naturaleza presenta formas más complejas, irregulares, fragmentadas, con dimensiones fractales, identificando así una serie de formas que Mandelbrot (1970) llamó fractales, y que en otra época se les denominó como monstruosas o patológicas. Parafraseo aquí la famosa proclama de Charles Hermite que plasmó en 1893 en una carta que dirigió al matemático Thomas Jan Stieltjes, en la que declaraba que “abandonaba con horror y espanto la lamentable plaga de funciones sin derivadas”, esas curvas sin tangentes que durante tantos años se dejaron en el olvido de los matemáticos por encontrarse horrorizados de los monstruos y figuras patológicas encontradas. Tiempo después Mandelbrot, retomó el tema y dedicó muchos años de su vida al estudio de los monstruos y sus aplicaciones.

Hay muchos estudios que comprueban el comportamiento fractal y su inherencia a la naturaleza, por ejemplo, en biología se han podido describir los cambios ontogenéticos en el árbol bronquial de mamíferos (Canals *et al.*, 1998; Canals, Olivares y Labra, 2000), variabilidad del ritmo cardiaco (García, 1998), ciclos respiratorios (Hoop, Kazemi y Leibovitch, 1993) y sistemas vasculares (Masters, 2004). En física fenómenos como las turbulencias, la geometría de las nubes y de las costas (Mandelbrot, 1970), las fracturas de los vidrios (Hinojosa y Chávez, 2001), la electrodeposición del zinc (Mas *et al.*, 1996). Mandelbrot (1963) hizo un estudio en relación a los precios del algodón y Edgar Peters también detectó comportamientos fractales en los mercados financieros junto con Mantenga, Palágyi y Stanley (1999) y Mansilla (2003), por lo que extrapolando

este orden de ideas no debería extrañarnos que el comportamiento del mismo hombre, al ser parte de la naturaleza, tenga patrones fractales, en cuanto a sus emociones, sentimientos, ideas, etcétera. Por lo tanto, el estudio de los fractales es de grandísima utilidad e importancia.

Una aplicación valiosísima de la teoría fractal es precisamente en las finanzas y en la economía. Diversos autores como Cantor (1955), Peano (1889), Poincaré (1902-1908), Mandelbrot (1970), Bachelier (1900), Fama (1965), Peters (1991), Julia, Sierpiński (1964), Hurst (1951), Feder (1988), Wiener (1958), Laplace, Taylor (1975), entre otros, han sido antecesores y precursores de estas teorías del caos y fractales.

En particular, el trabajo de Hurst (1951) y la construcción del coeficiente H, que vale la pena mencionar que cuando Hurst (1951) lo descubrió no lo nombró como H sino como K y fue años después Mandelbrot quien en su honor renombró dicho coeficiente como H (Mandelbrot y Hudson, 2006), tienen diversas aplicaciones, entre otras el pronóstico de tendencias en series de tiempo.

¿Por qué es cuestionado el funcionamiento de la teoría gaussiana y la famosa hipótesis de mercados eficientes (HME) en los mercados financieros? En general, debido a que:

- 1) Existen grandes cambios en los precios, y son mucho más frecuentes de lo que establece la teoría gaussiana; las observaciones reales son de naturaleza leptocúrtica, es decir, los cambios de precios no tienen distribución gaussiana.
- 2) Hay cambios fuertes y disparados en los precios que se producen en el tiempo y dan la impresión de que deben ser explicados de manera causal y no casual, pues no se explican estocásticamente.
- 3) Las series temporales no parecen ser estacionarias. La varianza difiere muchísimo en los distintos periodos, y tiene tendencia al infinito.
- 4) Los cambios en los precios no parecen ser independientes e incluso se muestra gran diversidad de patrones.

El presente trabajo es novedoso en el sentido de que al día de hoy no existen análisis R/S actualizados (encontrados), considerando datos a partir de la primera observación disponible hasta el momento, siendo éste su objeto de estudio. El índice de precios y cotizaciones S&P500 se considera el índice más representativo de los mercados financieros y uno de los más importantes índices mundiales. Finalmente, se busca proponer una alternativa viable de investigación que concuerde con la realidad.

ESTUDIOS PREVIOS

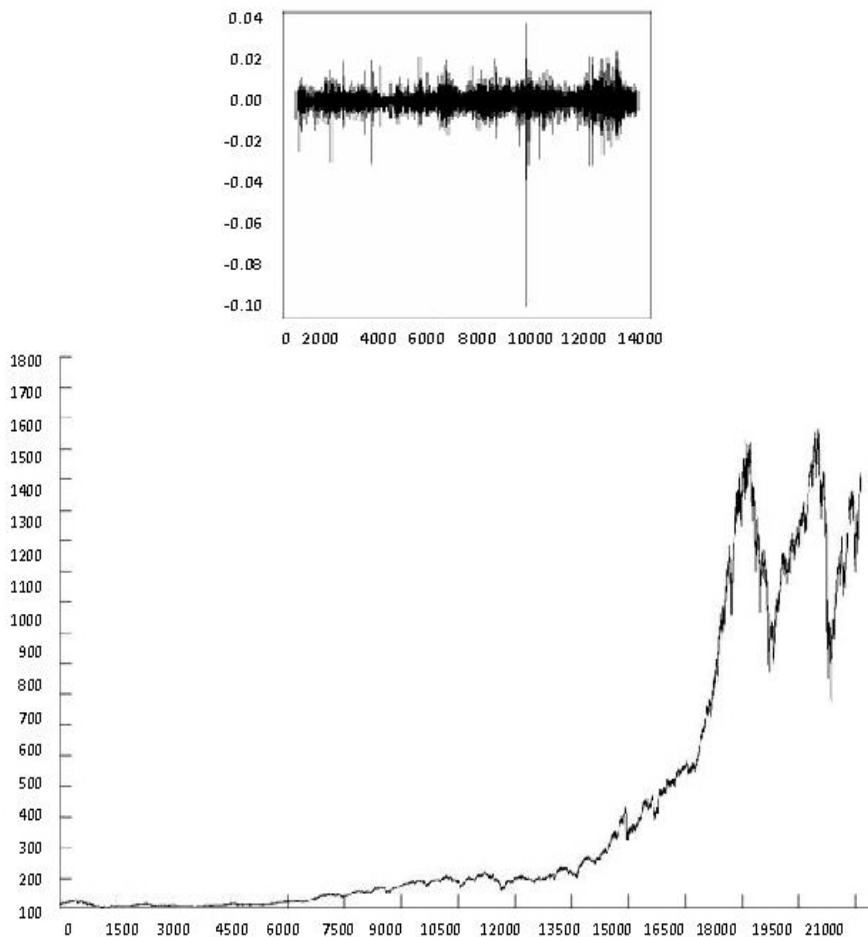
Existen diversos autores que han encontrado evidencia de que los mercados financieros presentan memoria de largo plazo. Espinosa (2007) de la Universidad de Santo Tomás de Chile, quien utiliza el análisis R/S para confirmar la dependencia a largo plazo de índices de bolsa de México, Brasil, Argentina y Chile, cita a Greene y Fielitz (1977), quienes también utilizaron análisis R/S sobre el índice Dow Jones para comprobar la existencia de memoria a largo plazo y concluyeron que hay comportamiento persistente en dicho índice. Peters (1991; 1994) encontró comportamiento persistente en sus análisis R/S realizados al índice S&P500, así como logró determinar la longitud de ciclos de la memoria a largo plazo en dicho índice. Actualmente, existe una controversia de si lo que se puede determinar es el corto o el largo plazo en un análisis R/S. Por su parte, Lo (1991) defiende la memoria a corto plazo y es más renuente a creer que se pueda determinar la memoria a largo plazo. En su trabajo titulado “Long Term Memory in Stock Market Prices”, propone un método modificado al R/S de Mandelbrot (llamado rango reescalado modificado) donde analiza series de tiempo financieras en diferentes periodos, y concluye que una vez que se toman en cuenta las autocorrelaciones a corto plazo se rompe la memoria de largo plazo.

Ibarra (2004), en un ensayo publicado por la Universidad Autónoma de Nuevo León, utilizando análisis R/S y Prueba Brock-Dechert-Scheinkman (BDS) realiza un estudio bajo la lupa de la economía dinámica caótica al tipo de cambio peso/dólar y llega a la conclusión de que la dinámica de los tipos de cambio es caótica y compleja. Muller (2009) en su tesis realizada en el Instituto Politécnico Nacional sobre la tasa de interés y métodos fractales y neuronales, demuestra la susceptibilidad de la tasa de interés ante variaciones en el tipo de cambio a partir de estimaciones obtenidas por métodos fractales y neuronales. Sierra (2007), investigador del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, en su trabajo premiado como el primer lugar del Premio Nacional de Derivados en México obtuvo resultados a favor de los procesos de memoria larga sobre procesos Hurst y movimiento browniano para algunos índices y volatilidades de mercados de México y de los Estados Unidos.

METODOLOGÍA

Para el análisis de memoria de largo plazo se consideró la serie del índice S&P para el periodo comprendido de 1928 a 2012 (véase la gráfica 1).

GRÁFICA 1
PRECIOS DE S&P500 DE 1928 A 2012 (DER) Y DIFERENCIAS LOGARÍTMICAS
EN FUNCIÓN DEL TIEMPO (IZQ)



Fuente: elaboración propia con datos de Bloomberg.

Esta serie financiera mostró características de una distribución ergódica y no estacionaria. La gráfica logarítmica (izquierda) muestra un comportamiento que no aparenta ser aleatorio, sino más bien caótico.

El software utilizado para analizar mediante R/S y el filtrado de ruido blanco de los datos fue *Benoit Fractal Analysis System* (BENOIT).¹ Antes de realizar el estudio se aplicó un filtro de ruido blanco y minería de datos a la serie y después se empleó el análisis R/S para la obtención del coeficiente H y se compararon los resultados antes y después del filtro de ruido blanco. Finalmente, se aplicó una prueba sugerida por Peters (1994) para confirmar la validez de la prueba a las series temporales.

La existencia de dependencia lineal en los datos puede producir valores de $H > 0.50$ sin que exista realmente un proceso de persistencia o de memoria larga, por eso debemos someter la serie temporal a una filtración de ruido blanco (o bien, ruido sin correlación). Estos procesos de eliminación de ruido blanco, en general, no eliminan la totalidad de la dependencia lineal, pero según Brock, Dechert y Sheinkman (1987) la pueden reducir a niveles muy bajos, es decir, se puede depurar el ruido blanco y reducir bastante los datos que puedan estar desviando el resultado del análisis. Antes de realizar el análisis R/S a la serie temporal se le aplicó un filtro para retirar ruido blanco y minería de datos de su trazo usando técnicas de Fourier, las cuales trabajan conduciendo una transformada seguida de una modificación de sus coeficientes y, a continuación, reversándola para así remover datos que contribuyan al ruido y que no tengan correlación con la serie temporal. Para este filtro se utilizó el software de BENOIT. Hay otras formas de filtrar los datos, por ejemplo Ibarra (2004) utiliza como filtro la función de Daubechies de mínima asimetría (MA 8) en un estudio que realiza con *wavelets* para analizar correlaciones de diferentes mercados accionarios.

Posteriormente, se corrió el modelo R/S a los datos sin filtrar y también a los datos filtrados de ruido blanco con el fin de cotejar el impacto del ruido blanco antes y después del filtrado.

RESULTADOS

Los resultados se presentan en el cuadro 1, el cual muestra los coeficientes de Hurst al evaluar la serie de tiempo en secciones con filtro de ruido y sin filtro de ruido.

1 La empresa Trusoft Int'l Inc desarrolló una herramienta llamada *Benoit Fractal Analysis System*. Benoit versión 1.2 es una aplicación que permite calcular la dimensión fractal y el exponente de Hurst de un conjunto de datos mediante distintos métodos.

CUADRO 1**RESULTADOS DE LA OBTENCIÓN DEL COEFICIENTE DE HURST, DIMENSIÓN FRACTAL Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR**

1928-1990				1928-1952			
S&P500	Sin ruido	Con ruido		S&P500	Sin ruido	Con ruido	
H	0.561	0.546	0.015	0	H	0.537	0.537
DF	1.439	1.454			DF	1.463	1.463
DE	0.2113	0.0837			DE	0.0723	0.0171
1991-2012				1953-1968			
S&P500	Sin ruido	Con ruido		S&P500	Sin ruido	Con ruido	
H	0.548	0.485	0.063	0.053	H	0.610	0.557
DF	1.452	1.515			DF	1.390	1.443
DE	0.0734	0.0294			DE	0.0665	0.033
1928-2012				1969-1995			
S&P500	Sin ruido	Con ruido		S&P500	Sin ruido	Con ruido	
H	0.549	0.535	0.014	0.045	H	0.570	0.525
DF	1.451	1.465			DF	1.430	1.475
DE	0.2161	0.0652			DE	0.0782	0.0356
1996-2012							
S&P500	Sin ruido	Con ruido					
H	0.550	0.477	0.073				
DF	1.450	1.523					
DE	0.0958	0.0394					

Nota: H = coeficiente de Hurst; DF = dimensión fractal, y DE = desviación estándar.

Fuente: elaboración propia con datos obtenidos mediante el software Benoit.

En el cuadro se aprecia que no se afectó más que mínimamente a las tendencias de las series. Las series menos antiguas, 1991-2012 y 1996-2012, resultaron tener las diferencias más altas entre el coeficiente H obtenido sin filtro de ruido blanco y el H obtenido con filtro de ruido blanco, siendo de 0.063 y 0.073 (restando H sin ruido y H con ruido), respectivamente. Las diferencias menores resultaron de los coeficientes de las series con más datos y más antiguas (1928-1990 y 1928-2012) diferencias de 0.015 y 0.14, respectivamente.

Un resultado interesante fue el de la serie de 1928-1952 porque no hubo diferencias entre la serie con los datos filtrados y con datos no filtrados, el coeficiente fue prácticamente el mismo, lo que refuerza que estas series no están afectadas por el ruido blanco y permiten concluir fuertemente que todas las series con o sin ruido resultaron con $H > 0.50$, es decir, todas sus combinaciones analizadas (1928-2012, 1996-2012, 1969-1995, 1953-1968, 1991-2012, 1928-1952) en este estudio resultaron series persistentes con indicios de comportamiento fractal.

Una conclusión directa de este análisis diferencial es que entre más larga sea la serie de tiempo menos impacto tendrá el ruido blanco en la determinación de H . También se observa que, en general, en las series a las que se les eliminó el ruido los coeficientes H resultaron mayores que al permitir ruido blanco, es decir, eliminar el ruido blanco en este caso resultó en reforzar la persistencia de las series, excepto por la serie de los años 1928-1952, donde H sin ruido fue igual que H con ruido.

El análisis R/S permite identificar sistemas dinámicos no lineales que mantienen procesos de memoria larga, como es el caso de las series de tiempo financieras, y facilita el reconocimiento de las series como fractales. Sin embargo, el análisis R/S no determina si hay comportamiento fractal o no, pero es una gran herramienta para detectar comportamiento caótico determinista y verifica si existe movimiento browniano fraccionario en la serie de tiempo y a partir de ahí el siguiente paso sería analizar las propiedades fractales de la serie temporal. Este método mide incluso la intensidad de dependencia a largo plazo.

Dada la relación:

$$R/S = as^H \quad [1]$$

donde R/S es el estadístico R/S que depende del tamaño de la serie, que se define como el rango de variación de la serie partido por su desviación típica, con media cero, expresado en términos de la desviación estándar y cuyo análisis es de tipo no paramétrico, ya que no requiere de una distribución específica; a , una constante; s , el número de observaciones, y H , el exponente o coeficiente de Hurst.

Cuando R/S es observado sobre varios valores de s se sigue que:

$$\log(R/S) = \log(a) + H \log(s) \quad [2]$$

Para obtener el coeficiente H a partir de una serie de tiempo de longitud N se divide la serie en un conjunto de subseries de longitud s . Para cada subserie de longitud s , $R(s)$ y $S(s)$ son determinados. Entonces se calcula el promedio ($R(s)/S(s)$) para cada valor de s . Por el método de mínimos cuadrados ordinarios una línea es ajustada por medio de los puntos que definen la relación entre $\log(R(s)/S(s))$ y $\log(s)$. La pendiente de dicha línea es, entonces, el coeficiente H . La fórmula R/S simplemente mide si, sobre intervalos de tiempo variables, el rango de variación de los datos entre el máximo y el

mínimo es mayor o menor de lo que se esperaría si cada dato fuera independiente del anterior. Cuando empíricamente $H = 0.50$, ello resulta un evento aleatorio puro, ya que la serie presenta movimiento browniano tradicional y de ruido blanco, entonces hay independencia contra las hipótesis alternativas ($H < 0.50$ o $H > 0.50$) que tienen comportamientos antipersistentes o persistentes, respectivamente. Cabe mencionar que el análisis R/S no requiere que el proceso subyacente se distribuya de forma normal, únicamente que sea independiente.

Si $0.50 < H < 1.0$, ello implica una serie de tiempo persistente, es decir, caracterizada por efectos de memoria de largo plazo, de *memoria de elefante*. En otras palabras, lo que suceda hoy impactará definitivamente el futuro, por ejemplo: cambios diarios de x periodo que están correlacionados con otros cambios diarios futuros conllevan ruido negro y, generalmente, aparece en ciclos de largo plazo (Luengas, Ardila y Moreno, 2010).

Si $0 < H < 0.50$, entonces significa que no hay un nivel de persistencia; se dice que hay una reversión a la media (Luengas, Ardila y Moreno, 2010). Si la serie ha estado arriba de un determinado valor que hace las veces de media de largo plazo en el periodo anterior, es más probable que esté abajo en el periodo siguiente y viceversa, lo cual se considera ruido rosa.

El análisis R/S realizado para la misma serie se presenta en el cuadro 2.

CUADRO 2

ANÁLISIS R/S PARA S&P500 POR PRECIOS DE CIERRES DIARIOS
(FILTRADO DE RUIDO BLANCO)

Años	H	DF	DE	Número de datos	Número de divisores de N desde 10 a $(n/2) - 1$
1928-1990	0.561	1.439	0.2113	15 120	69
1991-2012	0.548	1.452	0.0734	5 040	49
Otros intervalos de tiempo:					
Años	H	DF	DE	Número de datos	Número de divisores de N desde 10 a $(n/2) - 1$
1928-2012	0.549	1.451	0.2161	21 148	73
Años	H	DF	DE	Número de datos	Número de divisores de N desde 10 a $(n/2) - 1$
1928-1952	0.537	1.463	0.0723	6 120	38
1953-1968	0.610	1.390	0.0665	3 360	38
1969-1995	0.570	1.430	0.0782	6 720	46
1996-2012	0.550	1.450	0.0958	3 960	38

Fuente: elaboración propia con datos obtenidos mediante el software Benoit.

Después de analizar los resultados obtenidos con el análisis R/S efectuado a las diferentes secciones de la serie de tiempo del índice S&P500 con el filtrado de ruido blanco, el coeficiente H más bajo fue de 0.537 en la serie de 1928-1952 y el más alto fue 0.610 en el periodo de tiempo de 1953-1968. Para la serie completa que va de 1928 a 2012: $H = 0.549$ y $DF = 1.451$. Ahora bien, si analizamos los resultados del coeficiente H de todas las secciones de la serie se verá que todos son persistentes, es decir, los resultados de este trabajo apuntan hacia la existencia de un comportamiento fractal, *i.e.* con memoria de largo plazo, y es precisamente esto lo que el análisis bursátil persigue, por lo que he aquí cómo el análisis fractal podría coadyuvar en el análisis de tendencias y de gestión de riesgos.

Una conclusión directa de estos resultados es que aunque todos los resultados fueron muy cercanos, entre $H = 0.537$ (el menor) y $H = 0.610$ (el mayor) ningún valor de H se repitió y ninguno resultó de 0.50 o menor (antipersistente); así podríamos decir que desde 1928 hasta 2012 tenemos comportamientos persistentes de largo plazo; sin embargo, vale la pena mencionar que no es lo mismo obtener un $H = 0.537$ que, hipotéticamente, un valor de $H = 0.96$, esto es, tenemos una conclusión de comportamiento fractal “débil”, algo que se podría llamar “ruido gris” y no ruido negro propiamente, por lo que sería interesante aplicar otros métodos alternos al R/S para confirmar los resultados.

Según Díaz Mata (2008), la fuerza del sesgo depende de qué tan lejos de 0.50 se encuentra H , mientras que la fuerza de la conducta de reforzamiento de la tendencia aumenta en la medida que el coeficiente de Hurst obtenido se aproxime a 1. Aplicando esto al caso en cuestión, si el resultado de la serie completa (1928-2012) fue $H = 0.549$ hay, en esencia, una probabilidad de 54.9% de que si el último movimiento fue positivo el siguiente también lo sea.

En otro estudio, un ensayo de Ibarra (2004), se realiza una prueba de R/S al tipo de cambio peso/dólar y se obtiene un coeficiente $H = 0.54$, el cual le permite determinar al autor que hay comportamiento persistente. Bayraktar, Poor y Sircar (2004) realizaron pruebas de estimación de dimensión fractal al índice S&P500 (para una serie de tiempo de 11.5 años, de 1989 al 2000, segmentando periodos de dos meses) y obtuvieron que la mayoría de los coeficientes fueron de $H = 0.60$ y otros pocos de $H = 0.50$, lo que se traduce en resultados mixtos, es decir, unas series resultaron persistentes y otras no, pero al analizar con mayor profundidad obtuvieron la

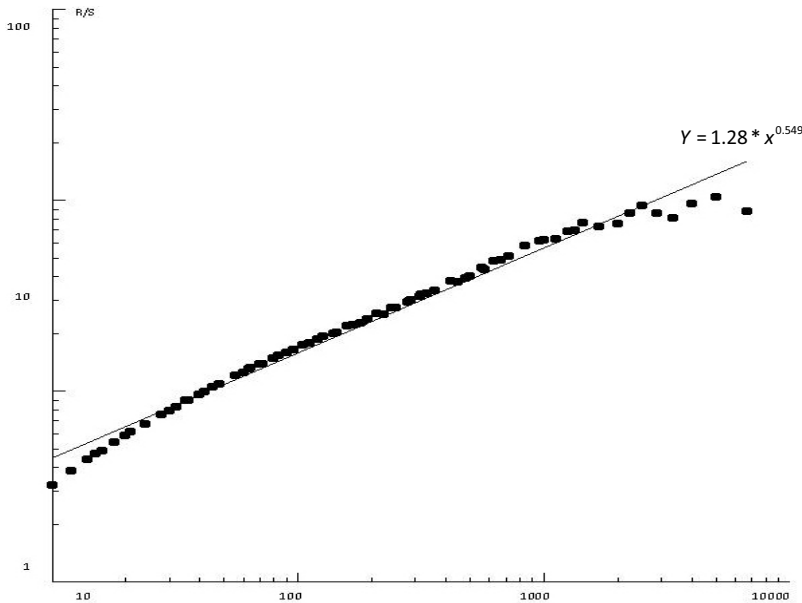
conclusión de que los periodos en que se obtuvieron coeficientes de $H = 0.50$ se debieron al incremento de pequeños inversionistas y al acceso de cuentas *on-line*, esto es, debido a demandas no esperadas de operaciones infrecuentes de pequeños inversionistas y que el incremento en las frecuencias de las operaciones realizadas por medio del S&P500 llevaba a que los resultados se acercaran a la Hipótesis del Mercado Eficiente (HME), el famoso paseo aleatorio. Estos resultados concuerdan con los obtenidos para efectos de este trabajo porque los obtenidos oscilan entre 0.537 y 0.610, no se encontró ninguno menor a 0.50. También Espinosa (2007) menciona a autores como Greene y Fielitz (1977) y otros como Peters (1991) que han obtenido resultados de $H > 0.50$ en análisis al S&P500, donde han confirmado evidencia de comportamiento persistente, resultado que también concuerda con los resultados de este estudio.

De acuerdo con Peters (1991; 1994) cuando hay valores muy grandes en el número de observaciones teóricamente H tendería a ser 0.50 y el efecto de memoria de largo plazo se va desvaneciendo. Para identificar los ciclos debe observarse hasta dónde se mantiene el comportamiento persistente, dónde se rompe, por ejemplo en la gráfica 2 se observa en la línea de tendencia que H se mantiene por encima del valor 0.50 aproximadamente hasta $N = 1\ 200$ ó $1\ 300$, a partir de esos datos se comienza a seguir un paseo aleatorio muy alrededor de $H = 0.50$. Recordemos que se trata de datos de precios de cierres diarios, en promedio estamos hablando de dos años. Esto quiere decir que la estructura fractal del ciclo es de aproximadamente dos años, lo que significa que si se quiere estimar algo utilizando ese dato, no debe ser con un horizonte mayor a dicho periodo de tiempo, ya que el ciclo se rompería. Cabe mencionar que los ciclos no son lineales, es decir, no son periódicos. Lo recomendado al realizar análisis R/S es utilizar unos diez ciclos para obtener datos fidedignos. En otras palabras, primero hay que determinar lo qué dure un ciclo y multiplicarlo por 10 y así sabremos si hemos considerado el número de datos correcto. En este caso, si el ciclo es de unos dos años debemos tomar alrededor de 20 años de datos (Peters, 1994).

De la serie 1928-2012 se eligieron los intervalos de tiempo separados por ciclos largos regulares y ciclos largos irregulares notorios en la gráfica 2 precisamente para evitar un problema de correlación serial, es decir, no hay que olvidar que la utilidad del análisis de-

GRÁFICA 2

ANÁLISIS R/S S&P500 FILTRADO SIN RUIDO BLANCO (SERIE DE 1928-2012)



Fuente: elaboración propia.

pende del horizonte o base temporal que se emplea. En este caso, al ser una muestra tan grande (se incluyeron más de 21 000 datos) nos hallamos frente a una muestra de alta frecuencia y pudiera ser que incurriésemos en distorsiones por correlación serial, esto es, que estemos generando un exceso de confianza en los resultados por tener una muestra tan amplia, mientras que si se consideran datos de cierre con baja frecuencia, podría resultar insuficiente la muestra para garantizar la calidad del resultado, por esta razón se seccionó la serie de tiempo, lo que permitió comparar unas series con otras y apreciar si es que tienen resultados opuestos o similares. De esta manera, se observó que hay resultados muy similares, aun combinando distintos tiempos y número de datos en cada análisis, y que los coeficientes H no presentan variaciones sustanciales entre el rango menor y el mayor encontrados. Otra metodología que sería interesante aplicar a una serie de tiempo de alta frecuencia sería el análisis por medio de *wavelets*, el cual funciona muy bien con datos de este tipo (Tellez Gaytán, y López Sarabia, 2010).

Derivado del análisis R/S podemos también determinar la dimensión fractal como $D = 2 - H$. Sabemos que el movimiento browniano

tiene dimensión fractal de 1.5, en nuestros resultados la serie de 1928-2012, en donde $H = 0.549$, presentó una dimensión fractal menor que la browniana, de 1.451, y a medida que H crezca tenderá a acercarse a una recta. Cabe recordar que un punto para estos efectos tiene dimensión $D = 0$; una recta, $D = 1$, y una superficie, $D = 2$. Cuando $H < 0.50$, por ejemplo, el periodo 1928-1952 con $H = 0.537$, la dimensión fractal se incrementó a 1.463 y se acercaría teóricamente más a una superficie ($D = 2$). Concluimos de esto que cuanto mayor es la dimensión, mayor será la variación, ya que la dimensión está relacionada con las variaciones que se presentan entre puntos próximos.

El valor de $H > 0.50$ implica que las observaciones no son independientes, sino que cada evento tiene una memoria de largo plazo. El pasado determina el presente; los eventos están interconectados. Esta es una aseveración interesante, se trata de proponer una correlación matemática entre el impacto del presente sobre el futuro. Peters (1991) propone al respecto la correlación siguiente:

$$C = 2^{(2H - 1)(-1)}$$

$$C = 2^{[(2 \cdot 0.549) - 1] - 1} = 0.0702 \quad [3]$$

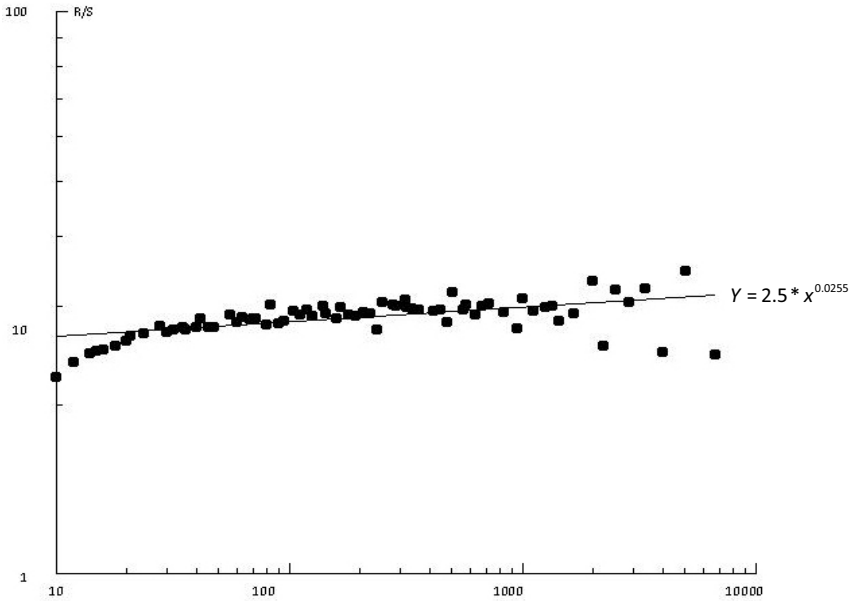
donde C es la medida de correlación y H el coeficiente de Hurst.

En la serie de tiempo del S&P500 estudiada, 1928-2012, se puede apreciar, utilizando la medida de correlación, que la aproximación de recta de regresión es confiable, por lo tanto, el valor del coeficiente de Hurst es válido estadísticamente. Si no existiera correlación, la medida de correlación de Peters sería de $C = 0$; sin embargo, una correlación de 0.0702 es bastante débil. Si el H obtenido fuera, por ejemplo, de 0.90, la correlación sería de 0.741 y si $H = 1$, sería de 1.

Para confirmar la dependencia de la serie de valores, Díaz Mata (2008) cita a Peters (1991) señalando que éste propone que se revuelvan los datos de forma que el orden de estos quede completamente revuelto y se recalculen H . Dado que los datos siguen siendo los mismos, la distribución frecuencial no sufriría variaciones y, en teoría, al revolver los datos se destruiría la estructura del sistema, a la vez que se rompería el efecto de memorias de elefante (memorias de largo plazo), por lo que el nuevo coeficiente estimado de H debería resultar mucho menor que el obtenido con los valores originales. Al realizar esta prueba sobre la serie de 1928-2012 obtuvimos los resultados que se muestran en la gráfica 3.

GRÁFICA 3

EJERCICIO DE ITERACIÓN RANDOM SIN RUIDO BLANCO (CON FILTRO) PARA VERIFICAR SI SE MANTIENE O DESTRUYE LA ESTRUCTURA (PETERS)



Fuente: elaboración propia.

El H inicial resultó de 0.549, después de hacer el ejercicio de revolver los datos originales con el filtro (se aplicó la función RANDOM en Excel) se obtuvo, tal y como lo muestra la gráfica 3, que H estimado = 0.026, es decir, al revolver los datos el nuevo coeficiente de Hurst es mucho menor que el inicial. Cuanto más distintos sean los valores de H originales de los estimados, entonces se confirma la dependencia de los resultados y su correlación de largo plazo; en otras palabras, hay una memoria latente, existe comportamiento fractal.

CONCLUSIONES

Del análisis realizado podemos afirmar que se detectó comportamiento de naturaleza caótica y memoria de largo plazo, dado que se obtuvieron coeficientes de H mayores a 0.50 en los análisis realizados. En todas las secciones analizadas de la serie de precios de cierre diarios del S&P500 se obtuvieron $H > 0.50$. No se obtuvo un solo dato que contradiga esta afirmación, lo que prueba que aun seccionando los periodos en varias combinaciones, cortas y

otras más largas (frecuencias bajas y altas), hay comportamiento persistente, de largo plazo, y podemos hablar de una posible naturaleza fractal en el S&P500, lo que nos muestra cómo el análisis fractal podría coadyuvar en el análisis de tendencias y de gestión de riesgos.

Para confirmar que la prueba fue válida se revolvieron completamente los datos originales de la serie y se recalculó el valor H , como resultado se obtuvo un coeficiente mucho menor que el original. Dado que los datos son los mismos, la distribución frecuencial no debe sufrir variaciones y al revolverlos se destruye la estructura del sistema, rompiendo el efecto de memoria de largo plazo, con lo que el nuevo H resultó mucho menor que el original (H original: 0.549, H datos revueltos: 0.026), lo que confirma la validez del análisis R/S. Según Peters (1991), esto prueba que la serie original tiene correlación de largo plazo.

Antes de realizar el análisis R/S se filtró el ruido blanco de cada una de las series con la finalidad de obtener una distribución que se ajuste a los supuestos del modelo de valuación financiera R/S y se calculó H con el filtro y H sin el filtro. El resultado fue que ambos cálculos de H fueron muy semejantes, es decir, que la serie de tiempo del S&P500 no se vio afectada más que de forma débil por el ruido blanco, siendo indistinto retirar el ruido blanco, ya que se obtuvo como resultado genérico un comportamiento persistente ($H > 0.50$). En ningún caso (datos filtrados) se obtuvo un coeficiente de H que no resultara mayor a 0.50. El análisis R/S es un método robusto y nos da una medida confiable de si los datos muestran una caminata aleatoria o es que hay un efecto de memoria de largo plazo.

Estas series presentan indicios de comportamiento fractal. La dependencia a largo plazo de los datos crea una tendencia, no hacia un nivel en particular, sino hacia cambios de una magnitud particular, en este trabajo el resultado fue de un cambio persistente. ¿Y para qué sirve conocer H ? Para gestionar no sólo tendencias, sino riesgos. Existen trabajos recientes en donde se ha intentado forjar una medida de riesgo a partir de H (Mandelbrot y Hudson, 2006), pero es justo aquí el punto de partida para que la investigación y la ingeniería financiera adopten verdaderamente un método científico. Los resultados obtenidos en este trabajo concuerdan con los resultados de otros autores: Peters (1991) obtuvo que el índice S&P500 es persistente, Bayraktar, Poor y Sircar (2004) también

llegaron al mismo resultado, de igual forma lo hicieron Greene y Fielitz (1977).

La correlación derivada del exponente de Hurst bien puede ser una medida del impacto del sentimiento del mercado (generado por eventos pasados) en cuanto a los retornos futuros de los mercados, en este caso del S&P500. Este “sentir” del inversionista representa la interpretación de los inversionistas sobre los eventos que afectan los cambios en los mercados. Esta interpretación no se refleja inmediatamente en los mercados (tal y como lo establece la HME), de hecho la manifiesta vía los retornos y comportamientos que perduran por décadas. El reto ahora es desarrollar un modelo de valuación de activos que tome en cuenta un proceso no lineal en su desarrollo.

Uno de los objetivos centrales de este trabajo es probar mediante el método R/S la existencia de memoria a largo plazo en el S&P500 y, por tanto, que hay indicios de comportamiento caótico y fractal, mismo que se probó determinando su coeficiente de H (de forma seccionada). Una aplicación de estos resultados sería en el modelo de portafolios y coberturas, por ejemplo, un portafolio que consista en índices o acciones que compartan un determinado valor de H, del cual se analicen sus retornos. Si un índice en particular muestra que su coeficiente H disminuye frente a un determinado valor, la posición que se tiene en ese índice o acción debería evaluar cerrar esa posición.

El paso siguiente sería realizar otros procedimientos alternos que tienen como base el movimiento browniano, tales como el variograma, el análisis de *wavelets* (Téllez Gaytán y López Sarabia, 2010), el análisis de densidad espectral o bien aplicar pruebas que directamente parten de nociones caóticas deterministas y estructura fractal, como la reconstrucción del atractor, la estimación de los exponentes de Lyapunov o la dimensión fractal (Bahena Villagómez, 2009). No obstante, la aplicación de los mencionados métodos rebasa el alcance del presente trabajo, y serían materia interesante de otros más.

Tal como lo menciona Peters (1994), el mayor inhibidor de la hipótesis del mercado fractal es precisamente la carencia actual de herramientas de análisis y modelado que faciliten las predicciones correctas en mayor o menor grado; sin embargo, hay perspectivas alentadoras en la línea de investigación del ruido fractal, por ejemplo, dentro del análisis tipo Box Jenkins de la familia de los modelos

autorregresivos y de medias móviles fraccionalmente integrados (en inglés *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*, ARFIMA) que es una variante de los autorregresivos integrados de medias móviles (en inglés *Autoregressive Integrated Moving Average*, ARIMA). Otra alternativa digna de consideración es la de trabajar con modelos autorregresivos como el de heterocedasticidad condicional (en inglés *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, ARCH) o el generalizado de heterocedasticidad condicional (*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, GARCH). Otra más sería incluir el modelo multifractal propuesto por Mandelbrot y Hudson (2006) para determinar el grado de escala de una serie financiera. Este modelo tiene un conjunto de reglas simples que pueden prever una gran variedad de comportamientos según las circunstancias, se parte de los hechos invariables fundamentales del comportamiento del mercado. Aunque es reciente y ya se ha probado su funcionamiento en el dólar y el marco alemán (Peters, 1991), aún está en proceso de perfeccionamiento, pero es mucho más realista que los demás modelos. Tanto el modelo GARCH como el multifractal incluyen una multitud de parámetros. Un punto favorable de GARCH es que combina conceptos estadísticos ya conocidos, un punto en contra es que niega la dependencia a largo plazo, salvo que se añadan ciertos parámetros y se forme un modelo GARCH fraccionalmente integrado (FIGARCH, en inglés *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic*). El análisis multifractal debe verse como una contrapartida natural de dos herramientas matemáticas clásicas: la función generatriz (secuencia de momentos) y el análisis espectral.

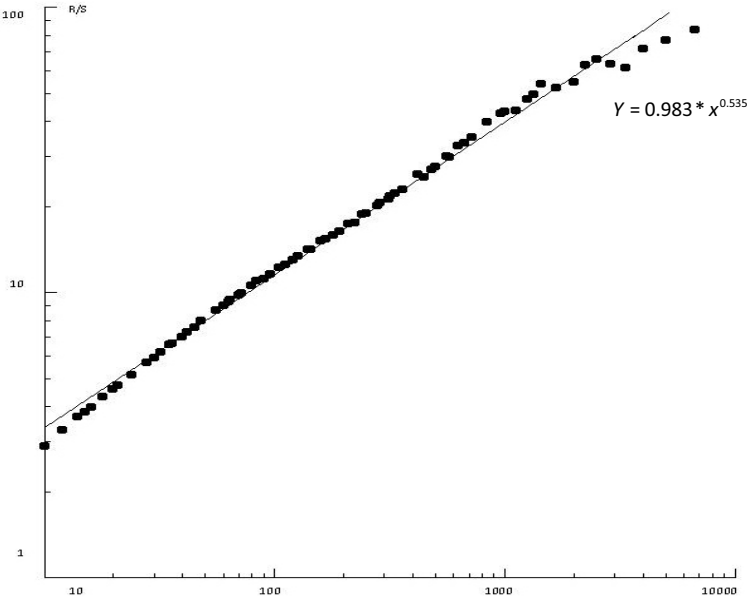
Finalmente, la alternativa de investigación más concordante con la crítica al comportamiento aleatorio de precios y rendimientos es la de reconocer que la distribución gaussiana debe ser sustituida por alguna de la familia de distribuciones estables de Pareto (las cuales tiempo después fueron estudiadas por Levy). Dichas distribuciones indudablemente se identifican mejor con lo observado en la realidad, es decir, con distribuciones leptocúrticas y con colas gordas, siendo precisamente la naturaleza fractal de las cosas la que obliga a replantear este camino como una alternativa de investigación y a continuar la búsqueda del camino correcto en la experimentación y la modelización que verdaderamente se apegue a los hechos reales y no únicamente a las verdades empíricas.

Los modelos tradicionalmente utilizados para el análisis de series de tiempo han pronosticado en forma adecuada el comportamiento futuro en épocas tranquilas, pero en tiempos turbulentos han mostrado no ser operativos, dado que no se tienen en cuenta los eventos poco probables. Así, la teoría fractal y multifractal incorporan los análisis de estos cambios, por lo tanto se ajusta más a la realidad. (Luengas, Ardila y Moreno, 2010).

Como señala Peters (1994), un mercado necesita estar lejos del equilibrio para estar vivo. El sistema evoluciona dinámicamente, innova, experimenta, aprende de forma permanente, por lo tanto siempre habrán procesos de alzas y bajas. De igual forma, la ciencia, la investigación y el conocimiento deben evolucionar hacia nuevos horizontes, para conservarse vivos y descubrir nuevos caminos y nuevas alternativas a la investigación.

ANEXO

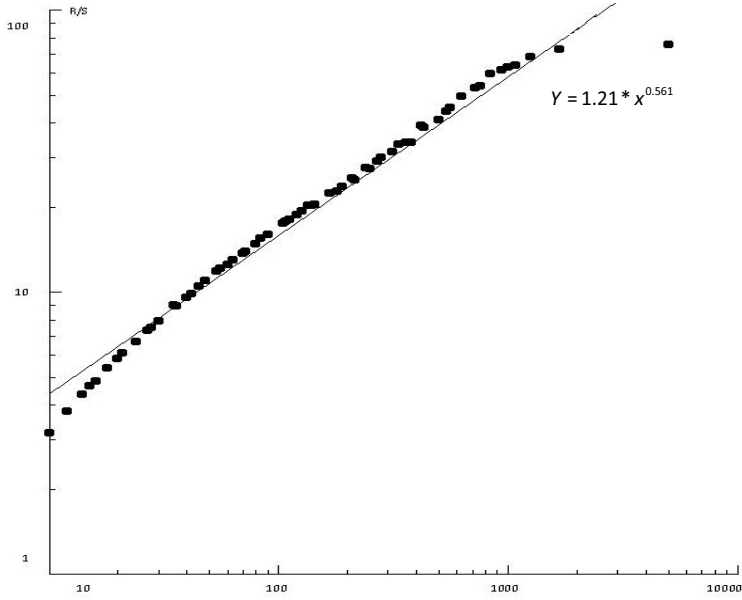
GRÁFICA 1A
SERIE DE PRECIOS DE CIERRE DEL S&P500 1928-2012 (DIARIO)
CON RUIDO BLANCO



Nota: la expresión gráfica del análisis, representando en ordenadas el logaritmo decimal de los distintos valores de R/S calculados y en abscisas el logaritmo decimal de los diferentes valores de n correspondiente a cada valor R/S , permite verificar la diferencia con los valores esperados de R/S si las series fuesen procesos aleatorios independientes e igualmente distribuidos.

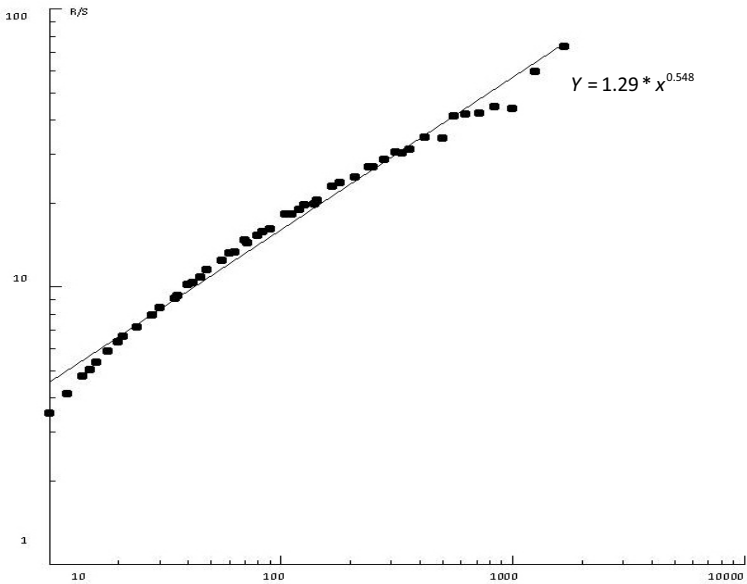
GRÁFICA 2A

ANÁLISIS R/S S&P500 FILTRADO SIN RUIDO BLANCO (SERIE DE 1928 -1990)



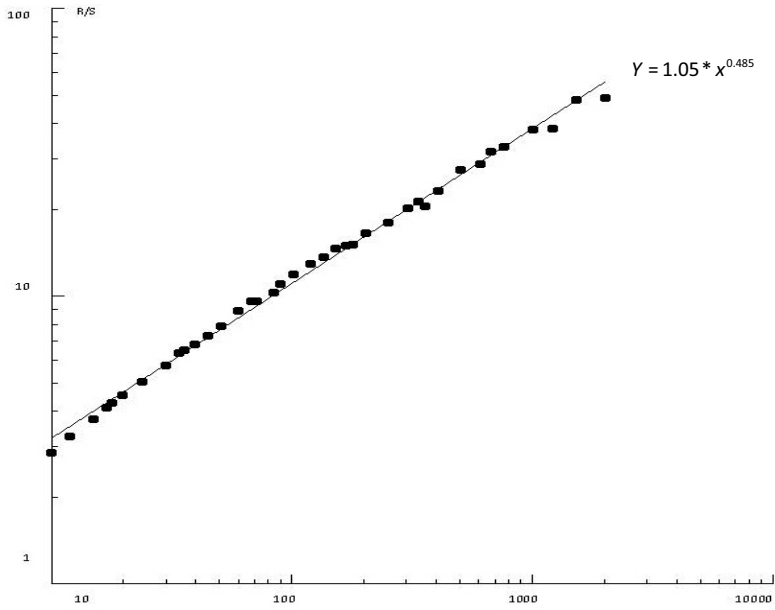
GRÁFICA 3A

ANÁLISIS R/S S&P500 FILTRADO SIN RUIDO BLANCO (SERIE DE 1991-2012)



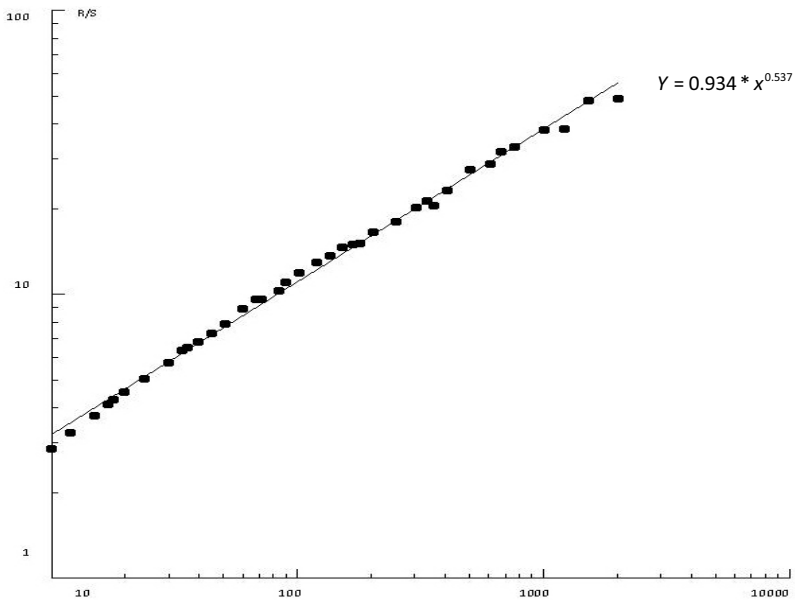
GRÁFICA 4A

ANÁLISIS R/S S&P500 CON RUIDO BLANCO (SERIE DE 1991-2012)



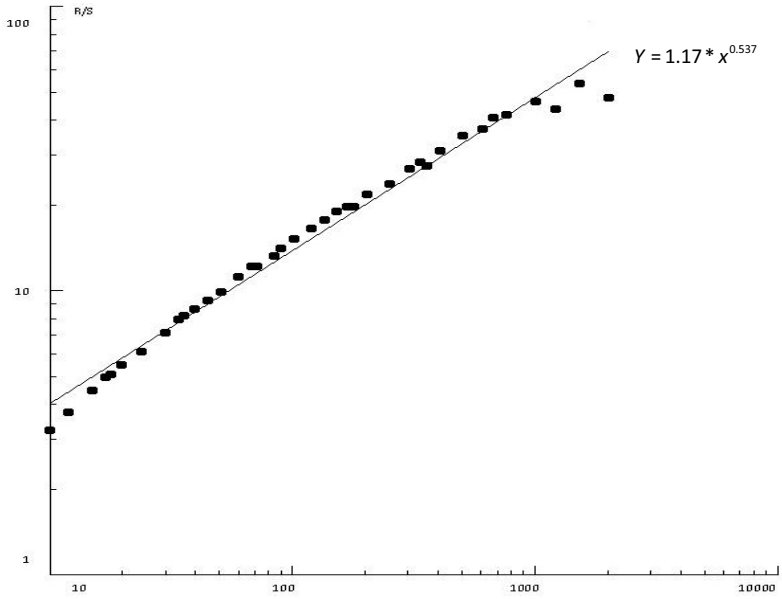
GRÁFICA 5A

ANÁLISIS R/S S&P500 CON RUIDO BLANCO (SERIE DE 1928-1952)



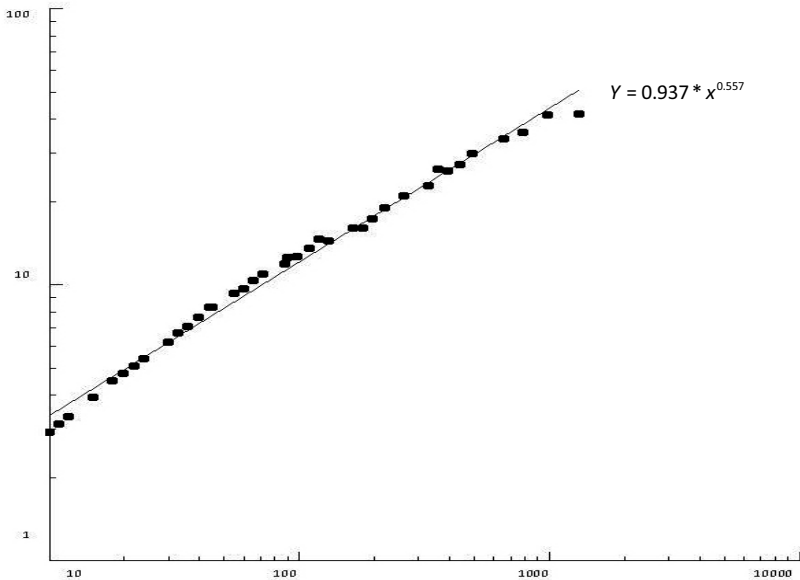
GRÁFICA 6A

ANÁLISIS R/S S&P500 FILTRADO SIN RUIDO BLANCO (SERIE DE 1928-1952)



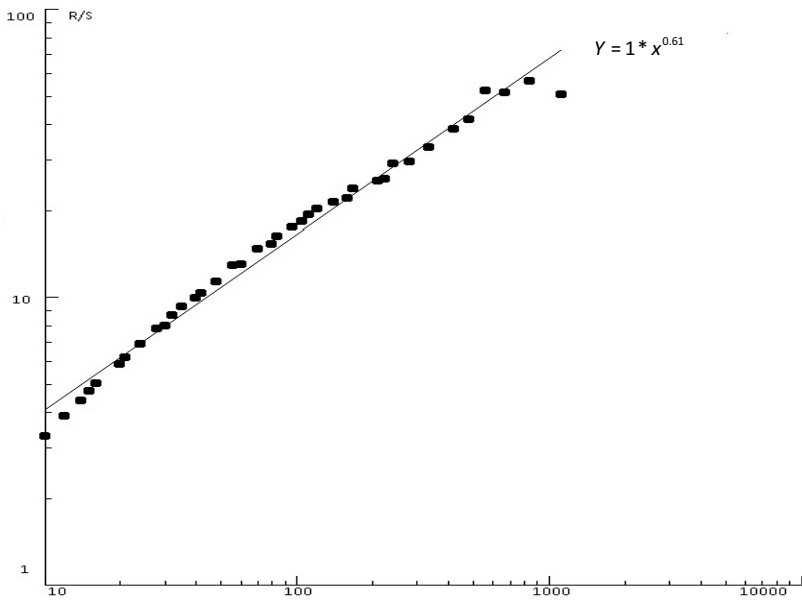
GRÁFICA 7A

ANÁLISIS R/S S&P500 CON RUIDO BLANCO (SERIE DE 1953-1968)



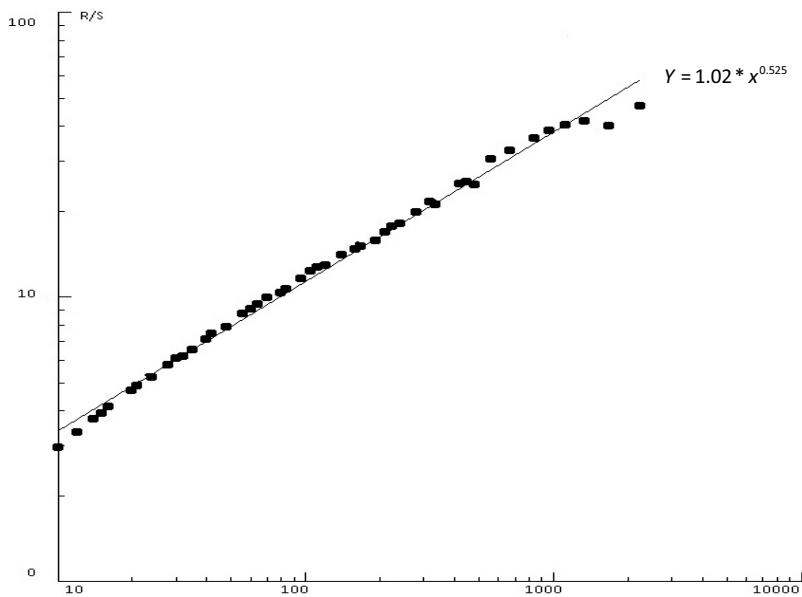
GRÁFICA 8A

ANÁLISIS R/S S&P500 FILTRADO SIN RUIDO BLANCO (SERIE DE 1953-1968)



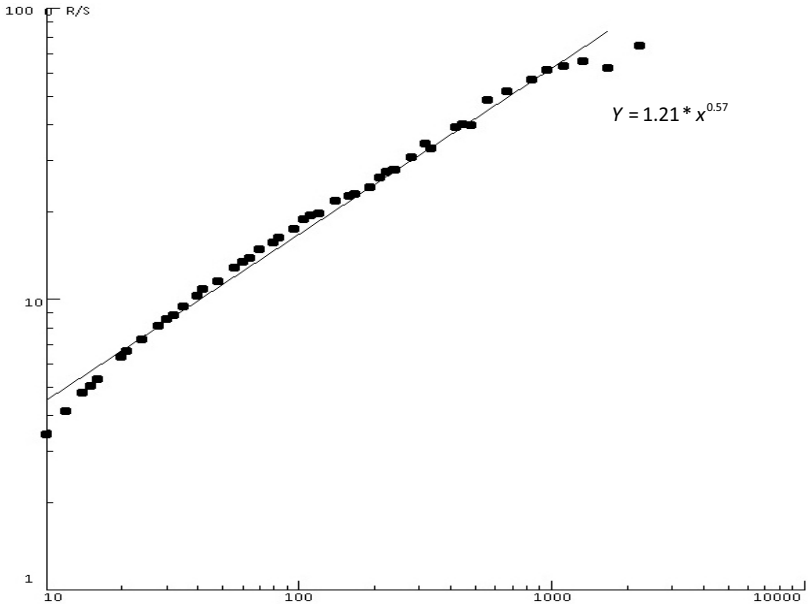
GRÁFICA 9A

ANÁLISIS R/S S&P500 CON RUIDO BLANCO (SERIE 1969-1995)



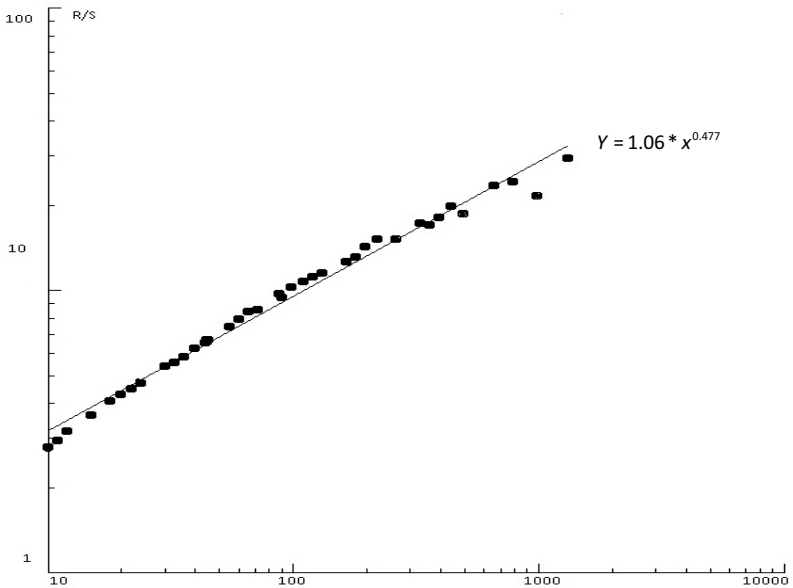
GRÁFICA 10A

ANÁLISIS R/S S&P500 SIN RUIDO BLANCO (SERIE 1969-1995)



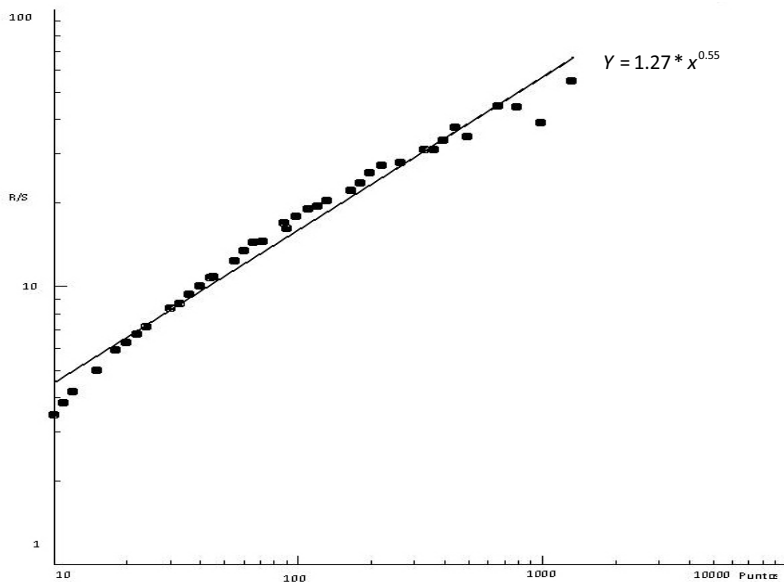
GRÁFICA 11A

ANÁLISIS R/S S&P500 CON RUIDO BLANCO (SERIE 1996-2012)



GRÁFICA 12A

ANÁLISIS R/S S&P500 FILTRADO SIN RUIDO BLANCO (SERIE 1996-2012)



REFERENCIAS

- Bahena Villagómez, J.I., 2009. *Sistemas dinámicos no lineales aplicados al IPC e índices internacionales*. Tesis magistral, Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración, México: Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- Bachelier, L., 1900. *Theory of Speculation*. Tesis doctoral. Princeton: Princeton University.
- Bayraktar, E., Poor, H. y Sircar, K., 2004. Estimating the Fractal Dimension of the S&P500 INDEX Using Wavelet Analysis. *International Journal of Theoretical and applied Finance*, 7(5), pp. 615-43.
- Brock, W.A., Dechert, W. y Scheinkman J., 1987. A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. Madison: Social Systems Research Institute, University of Wisconsin.
- Canals, M.; Olivares, R.; Labra, F.; Caputo, L.; Rivera, A. y Novoa, F., 1998. Caracterización de la geometría fractal del árbol bronquial en mamíferos. *Revista Chilena de Anatomía*, 16, pp. 237-44.
- Canals, M., Olivares, R. y Labra, F., 2000. Ontogenetic Changes in the Fractal Geometry of the Bronchial Tree in *Rattus Norvegicus*. [en línea] *Biological Research*, 33(1), pp. 31-5. Disponible

en: <http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S071697602000000100010&lng=es&nrm=iso>.

- Cantor, G., 1955. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Nueva York: Dover.
- Díaz Mata, F., 2008. Algunas consideraciones sobre el uso de técnicas fractales en el análisis del mercado accionario mexicano. *Contaduría y Administración*, enero-abril, 224, pp. 35-57.
- Espinosa, C., 2007. Memoria de largo plazo y efecto *reset* en retornos accionarios latinoamericanos. *Estudios de Administración*, 14(1), pp. 47-70.
- Fama, E., 1965. Random Walks in Stock Market Prices. *Financial Analysts Journal*, septiembre-octubre, 21(5), pp. 55-9.
- Feder, J., 1988. *Fractals*. Nueva York: Plenum Press.
- García, M.A., 1998. *Estudio de la variabilidad del ritmo cardíaco mediante técnicas estadísticas, espectrales y no lineales*. Tesis de doctorado. Universitat Politecnica de Catalunya.
- Greene, M.T. y Fielitz, B., 1977. Long-term Dependence in Common Stock Returns. *Journal of Financial Economics*, 4(3), pp. 339-49.
- Hinojosa, M. y Chávez, L., 2001. Autoafinidad de superficies de fractura del vidrio, *Ingenierías*, 4(13), pp. 50-4.
- Hoop, B., Kazemi, H. y Leibovitch, L., 1993. Rescaled Range Analysis of Resting Respiration. *Chaos*, 3(1), pp. 27-9.
- Hurst, H.E., 1951. Long-term- Storage of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, pp. 770-99.
- Ibarra, O. J., 2004. Caos en el mercado cambiario mexicano: Aplicación de la teoría del caos en los tipos de cambio, *Ensayos*, XXIII(1), pp. 31-60.
- Taylor, S.J., 1975. Paul Lévy. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 7(3), pp. 300-20.
- Lo, A., 1991. Long Term Memory in Stock Market Prices, *Econometrica*, 59(5), pp. 1279-313.
- Luengas, D., Ardila, E. y Moreno, J.F., 2010. Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst. Este artículo forma parte del trabajo desarrollado por Esperanza Ardila y Diego Luengas para optar por el título de maestría en finanzas de la Universidad Externado de Colombia.
- Mandelbrot, B., 1963. The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business of the University of Chicago*, 36, pp. 394-419.
- , 1970. *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.

- y Hudson, R., 2006. *Fractales y finanzas: una aproximación matemática a los mercados. Arriesgar, perder y ganar*. Barcelona: Tusquets Editores.
- Mantenga, R.N., Palágyi, Z. y Peters, H.E., 1999. Applications of Statistical Mechanics to Finance. *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 274, pp. 216-21.
- Mansilla, R., 2003. *Introducción a la econofísica*. Madrid: Equipo Sirius.
- Mas, F.; Mach, J.; Trigueros, P.P.; Claret, J. y Sagués, F., 1996. Creixement fractal: als límits de la modelització. En: Casassas, E. y Esteban, M. eds. *Modelització macroscòpica en Ciències Experimentals*. Tesis de doctorado. Institut d'Estudis Catalans.
- Masters, B.R., 2004. Fractal Analysis of the Vascular Tree in the Human Retina. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 6(1), pp. 427-52.
- Muller, N. I., 2009. *Evaluación de la tasa de interés en México mediante el uso de técnicas fractales y neuronales a fin de establecer un mecanismo eficiente de pronóstico*. Tesis de licenciatura. Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional (IPN).
- Peano, 1889. *The principles of arithmetic, presented by a new method in Jean van Heijenoort*. Estados Unidos. Harvard University Press.
- Peters, E.E., 1991. *Chaos, order in the capital markets*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc.
- , 1994. *Fractal Market Analysis*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc.
- Poincaré, H., 1902-1908. *The Foundations of Science*. [en línea] Nueva York: Science Press, Disponible en: <<http://www.archive.org/details/foundationsscie01poingoo>>.
- Sierra, G., 2007. Procesos Hurst y movimiento browniano fraccional en mercados fractales: valuación y aplicaciones a los derivados y finanzas. [en línea] Trabajo de investigación Primer lugar Premio Nacional de Derivados. Disponible en: <<http://www.mexder.com.mx>>.
- Sierpiński, W., 1964. Elementary Theory of Numbers. [en línea] *Monografie Matematyczne*, 42. Disponible en: <<http://matwbn.icm.edu>>.
- Téllez Gaytán, J.C. y López Sarabia, P., 2010. Comovimiento entre mercados accionarios de América Latina y Estados Unidos: Un enfoque de wavelets. *Revista Economía: Teoría y Práctica*, Nueva Época, 32, pp. 1-10.
- Wiener N., 1958. *Nonlinear Problems in Random Theory*. Estados Unidos: MIT Press-Wiley.